CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

"Propuesta didáctica para introducir una curva cónica mediante un entorno digital interactivo: El caso de la elipse"

TESIS

Que presenta:

FREDDY YESID VILLAMIZAR ARAQUE

Para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS ARMANDO CUEVAS VALLEJO

México, D.F. Marzo del 2014

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el

Apoyo económico proporcionado para la realización de mis

estudios de maestría que culminan con el presente trabajo de tesis de grado.

Becario 418556

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS:

Es mucho, y a muchos los que quiero agradecer por éste trabajo. Por eso este es el capítulo más importante de esta tesis, porque no solo debe estar mi nombre sino el de todos ustedes por su gran apoyo:

Dedico este trabajo a Dios Padre Todopoderoso porque todos mis logros han sido por Él, y mi vida entera para su Gloria. Gracias Señor Jesús por ésta meta cumplida, por ser mi luz y guía en mi caminar, por llenarme de fortaleza y sabiduría.

A mis padres Paula y Alirio, hermanos Alex y Carlos, mi tía Luisita, nonita Belén, tios, tias, primos, primas y familia entera, muchas gracias por su gran apoyo, por el amor y cariño brindado, por sus oraciones y porque siempre me han deseado lo mejor.

A ti Mónica Andrea, por demostrarme tu amor y apoyo incondicional, por tu cariño, motivación y paciencia.

A mis profesores: Dra. Olimpia F., Dra. Silvia M., Dr. Gonzalo Z., Dr. Manuel S., Dr. François P., Dr. Hugo M., Dr. Luis M., Dr, Riestra por sus aportes a mi formación como investigador, y en especial al Dr. Armando Cuevas por ser mi asesor, por orientar el desarrollo del trabajo de tesis al brindarme su gran experiencia y conocimiento, por su dedicación, gran apoyo, colaboración, por todos sus consejos, amistad y confianza, mil gracias.

A mis sinodales Dra. Rosa María Farfán, y Dr. Salvador moreno, por su tiempo y dedicación a la lectura de este trabajo.

A mis grandes amigos Guillermo y Eliana, por la paciencia, aportes, y por hacerme parte de su hogar, de igual manera a la familia Herrera Olguín por hacerme parte de su familia y por su gran apoyo.

A mis amigos y compañeros de maestría: Alfredo, Arely, Alfonso, María, Miguel, Hugo, José, Minerva, Oscar G., Arturo, Yani, Soco, Ulises, Francisco.

A ti mi gran amiga Betsy por ser mi gran consejera, por tu apoyo y palabras de aliento. Gracias a todos mis amigos y en especial a: Eduardo Ramírez, Rubi, Liliana la Gata, Johana M., Claris, Olguita, Cecilia, Marcela, Orozcopo, Dany, Sheliber, Larita, Sindy, Sahir, Magda, Sandra, Brígida, Lilis, María R., Fabián, parche UFPS y del CHE, hermanos de CRISMA.

A Adriana Parra, Gabi, Arturo, del DME, profesores Gina, Héctor, Oscar Avilés y mis estudiantes del Centro Educativo Damián por su apoyo y solidaridad.

Contenido

Resumen

En el currículo matemático de tercer semestre de preparatoria de la SEP (Secretaria de Educación Pública de México), se contempla el tema de las curvas cónicas cuyo tratamiento se centra gran parte en el desarrollo algebraico de sus ecuaciones. Sin negar la potencialidad de éstos métodos, es conveniente mediar el estudio de sus propiedades, en su definición como lugar geométrico, con una visualización geométrica sin demeritar el tratamiento algebraico. El presente trabajo de investigación es además, una propuesta que integra el campo de la matemática, la didáctica y las tecnologías digitales, en donde la enseñanza de la elipse es un ejemplo o prototipo de cómo se podría generalizar para introducir las demás curvas cónicas en Geometría Analítica, por medio de actividades enmarcadas en la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) y los tres primeros niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele, reinterpretado bajo esta didáctica.

Abstract

Within the mathematics curriculum for third semester in de high school for the SEP, we can find the issue called conicals curves, whose teaching is focused almost exclusively on developing algebraic equations of conics. Without denying the potential of these methods, the study of conics should begin from their legitimate properties as loci, with a geometric visualization without devalue the algebraic treatment. The present research is a proposal linking the worlds of mathematics, didactics and digital technologies, where the teaching of the ellipse is an example of how one might generalize to introduce other conic curves in Analytic Geometry, through activities supported in Cuevas & Pluvinage Cuevas didactic, and the first three levels of development of the Van Hiele geometric, reinterpreted under this didactic.

Introducción

En los programas curriculares presentados en países como México por la SEP (2013) CCH-UNAM (2013), Colombia con el MEN (2006) y en España como lo afirman Contreras, Contreras, García (2002), es notable que el estudio de las curvas cónicas se aleja un tanto de la parte Geométrica para dar exclusividad a la parte algebraica de las mismas, donde se empobrece la intuición geométrica, y consecuentemente las propiedades geométricas de las mismas. Por otra parte, los programas curriculares presentan los contenidos aislados de su desarrollo histórico y de sus aplicaciones; además fuera de un contexto social, es decir los descontextualiza de la realidad.

Adicionalmente, a pesar del desarrollo de las tecnologías digitales y en particular de sistemas de geometría dinámica, en general, no se utilizan recursos tecnológicos que permitan un acercamiento a los conceptos mediante la interacción de los diferentes objetos matemáticos que promueven competencias matemáticas en los estudiantes. También, en algunas instituciones educativas, no se hace uso de la tecnología debido a múltiples factores, por enumerar algunos, no cuentan con una política de actualización docente, carencia de equipos de cómputo en buen funcionamiento y software adecuado (González, 2010), lo cual conlleva a la falta de proyección hacia cursos que integren los temas de matemáticas con la tecnología. De acuerdo con Sacristán, Calder, Rojano, Santos, Friedlander, Meisser (2010) las tecnologías tienen un papel central en la comprensión y desarrollo de conceptos matemáticos, gracias a las múltiples representaciones que la computadora ofrece de éstos. La NCTM (2008) menciona que “La tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje de las matemáticas, en el siglo XXI, y todas las escuelas deben de asegurar que sus estudiantes tengan acceso a la tecnología.

La búsqueda de las relaciones entre las matemáticas, didáctica y la tecnología, se materializó como propuesta del presente trabajo de investigación, en el que se realizó un análisis bibliográfico en diferentes artículos de investigación, los cuales hacen referencia a los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica, como en Del Rio (1991), Cruz & Mariño (1999), Contreras, Contreras & García (2002), y Bussi (2005).

La propuesta establece una relación entre las matemáticas, la didáctica y las tecnologías digitales, con el propósito de promover un mejor entendimiento de conceptos matemáticos, mediante el diseño de una serie de actividades didácticas que se enmarcan en la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), donde la inclusión de la tecnología adquiere un papel relevante y de motivación para el estudiante, puesto que permite la visualización e interacción con los objetos geométricos. La propuesta presentada, introduce particularmente el concepto de elipse, sin embargo la ruta didáctica aplicada se puede extrapolar heurísticamente para la comprensión de otras curvas y conceptos geométricos tales como: circunferencia, parábola, hipérbola, partiendo de la visualización, análisis de las propiedades y definiciones de las figuras como lo sugiere el nivel I, II de Van Hiele. Finalmente, el estudiante debe realizar clasificaciones lógicas, y seguir demostraciones algebraicas de manera formal a las figuras como lo establece el nivel III de Van Hiele. El uso de la tecnología será importante para mantener la parte activa en los estudiantes como lo propone la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), donde el estudiante es quien realiza la acción y construye las diferentes definiciones de manera dosificada partiendo siempre de un problema en contexto, lo cual hace de las Matemáticas un área funcional, es decir según Aebli (1995) es aplicada a situaciones del mundo real para entender por qué o cómo funcionan las cosas.

El contenido del presente trabajo se divide en los siguientes capítulos:

Capítulo I. Planteamiento del problema y antecedentes.

Capítulo II. Marco teórico-didáctico, computacional y conceptual.

Capítulo III. Metodología y diseño de los instrumentos de medición.

Capítulo IV. Análisis de resultados

Capítulo V. Conclusiones e investigaciones Futuras

Capítulo I. Planteamiento del problema y antecedentes

En este capítulo se presentan dos aspectos importantes; en primer lugar, las causas que dieron origen al presente trabajo de investigación, y en segundo lugar, al surgimiento de una propuesta didáctica para introducir una curva cónica, en particular de la elipse vista en un primer curso de Geometría analítica, mediante el uso de actividades dinámicas e interactivas bajo un marco didáctico.

La necesidad de aplicar una didáctica específica radica en aspectos como promover una mejor comprensión en los estudiantes sobre los cursos de matemáticas que forman parte de los diferentes currículos educativos de diferentes partes del mundo como México, Colombia, España, entre otros[1] que exigen al estudiante cumplir con objetivos cognoscitivos, y al profesor con ciertos roles para la enseñanza, entre ellos el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación TIC (SEP, 2013). Finalmente, es importante mostrar la elipse, como patrimonio cultural, ya que a lo largo de la historia es un tema que ha sido útil y funcional en el mundo real.

1.1. Antecedentes

Antes de diseñar la propuesta didáctica, se hará en primera instancia un breve análisis de la problemática presentada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes en la Geometría analítica, y así mismo trabajos referentes al estudio y enseñanza de la misma:

Del Río (1991) hace un estudio comparando dos metodologías para la enseñanza de las cónicas en el aula. En la primera, aplica el modelo de aprendizaje por descubrimiento, basado en la teoría de Bruner, concluyendo que la mayoría de los estudiantes (aprox. 80%) de población de estudio, presentan *una confusión* entre las formas planas y espaciales, al afirmar que los huevos de gallina tienen forma de elipsoide, y los melones forma de elipse; sin embargo, reconocen y diferencian las figuras (cónicas), al identificar alguna propiedad particular de modo perceptivo (p. 116). En la segunda, se aplica una didáctica tradicional donde concluye que la mayoría de los estudiantes perciben las cónicas conectadas con la realidad, por ejemplo, que las órbitas planetarias son elipses, y añade que se trata de un

[1] Países de los cuales se hará un análisis curricular, no exhaustivo, sobre la elipse.

conocimiento social (p. 121), es decir, que quizás lo han escuchado pero no justifican con propiedades matemáticas el por qué la trayectoria que siguen los planetas, es elíptica.

Por otra parte, Cruz & Mariño (1999) afirman que "dentro del estudio de la Geometría analítica, se han presentado dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas" (p. 15), y argumentan que:

> *"(...) en los trabajos sobre educación matemática para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos de los estudiantes se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica, ni el porqué de su definición como lugar geométrico lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen" (p. 15).*

En la idea de darle un contenido más geométrico a los tradicionales cursos de geometría analítica, Contreras, Contreras & García (2002) hacen una propuesta adecuada para contrastar la geometría sintética con la analítica. En ella realizan diversas construcciones sintéticas de la elipse como el método del jardinero, otras analíticas y sintético-analíticas. Los autores afirman de dichas construcciones que son elementos motivantes y formadores para los estudiantes de bachillerato, y que también algunos de los institutos de secundaria, en España, cuando se enseña un curso de Geometría analítica, la elipse ni siquiera llega a tratarse en clase, y que a lo más que se aspira en el desarrollo de la unidad es realizar un estudio de la circunferencia, lo que concuerda con algunas instituciones educativas en México y Colombia. Además en su investigación, mencionan que debido al desconocimiento de las cónicas en su totalidad, posteriormente trae consecuencias negativas para los estudiantes en el primer año de universidad.

En el mismo sentido, Santos & Espinosa (2002) diseñan una construcción de tipo geométrica que unifica las cónicas (elipse e hipérbola) utilizando un software de Geometría dinámica, es decir, que por medio de la definición foco-directriz de las cónicas se puede representar las cónicas en una misma construcción geométrica dinámica, para posteriormente estudiar sus propiedades.

Por su parte, Bussi (2005) desarrolló un proyecto de investigación denominado “máquinas matemáticas” (p. 9 a 13) donde muestra el desarrollo histórico de los significados de las cónicas, señalando que el principal problema es relacionarlos en los diferentes años o tiempos. Históricamente es un componente inevitable la construcción de significados, pues el de *cónicas* por siglos llamados secciones cónicas, enfatiza que provienen de un cono, pero, al objetivizarlas como el lugar geométrico que satisface la ecuación de segundo grado obtenida a partir de ciertas relaciones paramétricas, no es suficiente porque esto no da información acerca del significado geométrico, de donde provienen, por ello es necesario contrastar hechos históricos de la elipse, de Apolonio con la geometría analítica de Descartes.

En cuanto a la enseñanza de la Geometría analítica bajo un marco didáctico que promueva una mejor comprensión de los conceptos geométricos, Carbajal (2013) propone un acercamiento al estudio de la línea recta desde el punto de vista de lugar geométrico tomando como marco didáctico la didáctica Cuevas-Pluvinage (2003), y apoyándose fuertemente en el uso de las herramientas digitales como el Sistema Tutorial Inteligente LIREC (Cuevas, 2003), así como el desarrollo de un escenario interactivo virtual interactivo (EDVI) para favorecer la comprensión del concepto de línea recta, pendiente y conceptos asociados. La didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) propone en uno de sus puntos, que el estudiante es quien debe realizar la acción y construya el conocimiento de los conceptos.

Por otra parte en Cantoral y Farfán (1998), desarrollan una aproximación teórica a la didáctica de las Matemáticas de naturaleza epistémica, que supone un avance constructivista de las mismas de tipo socioepistemológico con cuatro componentes en la construcción de dicho conocimiento: su naturaleza epistémica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo, y los modos de la trasmisión de la enseñanza. Aunque esta teoría se basa en el pensamiento y lenguaje variacional, se considera que muchas de sus ideas motrices pueden aplicarse a otros campos de la Matemática, como en el caso de la enseñanza de la Geometría Analítica.

Actualmente, algunos textos de Matemáticas diseñan actividades didácticas como el de Matemáticas III de Cuevas (2013), el cual presenta una metodología más dosificada en el tratamiento de la elipse, como lo propone la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003, p. 277), bajo la siguiente secuencia: 1) Se visualiza la figura a partir de las diferentes aplicaciones como: construcciones de la elipse por el método del jardinero, y la segunda ley de Kepler que describe la trayectoria elíptica de traslación de los planetas. 2) Se define la elipse como cónica y lugar geométrico. 3) Se estudian los elementos más importantes de la elipse y sus propiedades. 4) Se demuestra de manera formal la ecuación canónica de la elipse y posteriormente la general. 5) Por último, se estudia la excentricidad en la elipse. La importancia de llevar actividades dosificadamente, radica en la formación del razonamiento geométrico partiendo de la visualización de las figuras hasta llegar a definirlas formalmente; según Van Hiele, 1986, citado por Jaime & Gutiérrez (1990), en el caso de la geometría, no es posible alcanzar un nivel de razonamiento geométrico sin haber superado un nivel más básico (p. 312); un caso particular de ello es cuando un estudiante halla la ecuación de una elipse de forma mecánica, sustituyendo solo valores numéricos y realizando operaciones algebraicas, pero antes de ello no profundiza en las definiciones y propiedades de la figura que conllevan a la demostración de la misma.

Uno de los libros de texto más utilizado en México es la Geometría Analítica de Lehmann (1989 décima tercera reimpresión y apareció en 1942); que presenta problemas propios de su antigüedad, y carencia del uso de tecnologías digitales que doten de dinamismo a los objetos matemáticos geométricos, además de una ausencia de un planteamiento didáctico. Por otra parte, los temas aparecen de manera lógico-formal, lo cual confronta al estudiante con su educación anterior. Sin embargo, es un libro con un gran banco de problemas graduados; donde se detalla la siguiente secuencia para el caso de la elipse: 1) Definición de la elipse formalmente como lugar geométrico. 2) Descripción de los elementos de la elipse. 3) Demostración algebraica de la ecuación que satisface el lugar geométrico de los puntos sobre ésta. 4) Problema fundamental de la Geometría Analítica que consiste en el planteamiento de una serie de ejercicios, donde se dan parámetros de la elipse para hallar su ecuación, y viceversa. Esta presentación coincide con los planes curriculares de educación, sin embargo, no se lleva una secuencia para la comprensión conceptual, centrándose exclusivamente en el desarrollo de ejercicios algebraicos; por lo tanto éste libro de texto de gran nivel es, en el sentido didáctico, un contraejemplo a la propuesta didáctica Cuevas & Pluvinage (2003, p. 275) donde se establece que en lo posible se debe partir de una aplicación en contexto para la enseñanza de los conceptos. La inclusión de un contexto en un problema matemático, según Aebli (1995) asegura con frecuencia el interés de los estudiantes, los cuales no se fijarían en el sólo tratamiento teórico del proceso del tema (p. 161).

En el libro de Sullivan (1997) "Trigonometría y Geometría Analítica", aunque sigue siendo un texto atractivo por las aplicaciones que presenta, también carece de una perspectiva tecnológica digital y de un planteamiento didáctico explícito. En este libro, se presenta una breve introducción sobre cómo construir la elipse por medio del método del jardinero, que también se muestra en la mayoría de los libros de texto de Matemáticas III, posteriormente propone una serie de ejercicios de tipo operativo al igual que la Geometría Analítica de Lehmann (1989), y ejercicios de aplicación de la elipse en la vida real, como: el de la galería de los suspiros, la órbita de traslación de la Tierra, pero muchas de éstas son tareas estereotipadas, es decir, aquellas que se ajustan exactamente a las fórmulas y teoremas memorizados. La presentación de algunos problemas en contexto de este libro causan confusión, por ejemplo, el de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, donde ilustran un dibujo de cada órbita "cuasi" elíptica señalando su afelio (distancia más lejana del Sol a la Tierra) y perihelio (distancia más cercana del Sol a la Tierra), de una forma muy excéntrica o más "ovalada", siendo que realmente esta órbita es casi circular. Además, los problemas en contexto se presentan al final del desarrollo teórico y no desde un comienzo para introducir el concepto.

Como se expuso anteriormente, la mayor parte del tratamiento de las cónicas en los libros de texto de matemáticas consultados, tienen las siguientes características:

1. Los libros carecen de actividades o recomendaciones de uso de tecnología digital por medio de programas de geometría dinámica, que posibilitan a los objetos geométricos presentados, un manejo dinámico.
2. No se explicita en ellos alguna propuesta didáctica que promueva una mejor comprensión de los problemas.
3. Su presentación muchas de las veces es de corte lógico-formal en las matemáticas, lo que hace que sean textos para el docente y no para el estudiante.
4. No se utilizan los problemas en contexto para introducir las diferentes definiciones, dejando estos últimos para el final del capítulo como problemas de aplicación propuestos, que por los tiempos ajustados de los programas de estudio, casi nunca se tiene el tiempo para exponerlos y analizarlos.
5. La presentación de los temas tiene una fuerte carga algebraica que demerita la parte geométrica, y que empobrece la visualización de ésta, lo cual desequilibra el registro de representación geométrico, devaluando, según el marco didáctico, la comprensión del concepto matemático.

El problema de la presentación en la mayoría de los libros de texto de Geometría Analítica radica en el empobrecimiento geométrico, debido a que el planteamiento de ejercicios y problemas es de tipo algebraico. Este problema es común en muchos países, y concuerda con Contreras, Contreras & García (2002, p.114), quienes señalan que en España el tratamiento que se observa en los textos es de tipo analítico exclusivamente, y no encuentran explicación para tal comportamiento.

1.2. La elipse en el currículum educativo

Actualmente, estudiar las curvas cónicas se considera importante, no sólo por las aplicaciones que tienen en el mundo real dentro de: la arquitectura, la física y la ingeniería; y en la elaboración de modelos matemáticos económicos[2], modelos matemático-astronómicos, instrumentos tecnológicos (navegación, medicina, relojería, etc.) entre otras, sino porque académicamente, contribuyen a la formación matemática de los estudiantes universitarios, como una parte fundamental del desarrollo conceptual de la matemática y en

[2] http://es.wikipedia.org/wiki/Curvas_de_indiferencia

particular del precálculo, como se puede verificar en los planes curriculares de educación Nacional en México, como CCH-UNAM (2013) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM),el currículo de la Secretaria de Educación Pública SEP (2013) (ver anexo I y II), y también otros países como en el Ministerio de Educación Nacional MEN de Colombia (2006, p. 88).

Los cursos de Geometría Analítica en México, se encuentran en el programa de estudios nacional de preparatorias en Matemáticas III. En particular, el programa de estudios de Matemáticas del III y IV semestre del CCH-UNAM (2013, p.p. 64-65) (ANEXO I) aborda el estudio de las cónicas. Para el caso de la elipse, los objetos de aprendizaje son: la propiedad bifocal que define la elipse como lugar geométrico, presentación de sus elementos, y deducción de la ecuación formal de ésta, culminando con la resolución de problemas aplicados. El programa ofrece una serie de estrategias que permiten iniciar desde la visualización, reconocimiento y construcción de la elipse (nivel I de Van Hiele); sin embargo, en un sondeo realizado a profesores de matemáticas del CCH, comentan que algunas estrategias del currículo no son consideradas, y que su modo de enseñanza es dar una definición de elipse como lugar geométrico tomada de algún libro de Geometría Analítica, y luego centrarse en el desarrollo algebraico de su ecuación a partir de algunos de los elementos de la gráfica, y viceversa. Aún prevalece el planteamiento operativo que se propone como dos problemas fundamentales de la Geometría analítica (Lehmann, 1989) que consisten en dar la ecuación, para interpretarla gráficamente, y luego hacer su operación inversa. A pesar de que en esta institución se promueve el uso de la tecnología por medio de programas de geometría dinámica, no es de uso común por parte de la mayor parte de los docentes. Otra dificultad es el tiempo académico, en donde la acumulación de contenidos hace casi imposible completar un programa de estudios, por lo que un comentario común entre los docentes entrevistados es: "*no es suficiente el tiempo de clase para llegar a elipse, solo alcancé hasta parábola…", además,* la enseñanza se vuelve descontextualizada al dejar las aplicaciones para el final de las clases, en cuanto el tiempo escolar lo permita. Corroborando lo anterior Contreras, Contreras & García (2002, p. 114) enfatizan que en el segundo curso de bachillerato en España, aparece la unidad con el tema de las cónicas, el cual no se alcanza a completar en muchas instituciones educativas como lo establece la planeación curricular; generalmente, se logra llegar hasta el estudio de la circunferencia, generando consecuencias un tanto negativas en los estudiantes, que pasan de bachillerato a una formación universitaria.

Analizando el programa de la Secretaria de Educación Pública de México (SEP, 2013), la asignatura de Geometría Analítica de la materia de Matemáticas III, se desarrolla en siete bloques, siendo el último la "aplicación de los elementos y ecuaciones de la elipse" (p. 9) (ver anexo II). El tiempo estimado para desarrollar el bloque VII es de aproximadamente 12 horas, y sugiere los siguientes subtemas como logros escolares:

- La Identificación de los elementos asociados a la elipse
- El reconocimiento de la ecuación ordinaria y general de la elipse
- La aplicación de los elementos y ecuaciones de la elipse, en la solución de problemas y/o ejercicios de su entorno, (p. 40)

Por lo tanto, los elementos claves de aprendizaje para este bloque son: 1) elipse, 2) elementos de la elipse, 3) ecuación ordinaria horizontal y vertical con centro en el origen y fuera de esta, 4) ecuación general de la elipse. Una de las competencias a desarrollar es "utilizar las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar cada concepto aprendido y mencionado por el profesor" (SEP, 2013, p.40). Para ello también se propone que el docente cumpla con el rol de facilitar el proceso educativo al diseñar actividades significativas integradoras, que permitan vincular los saberes previos del alumnado con los objetos de aprendizaje, así como propiciar el uso de las TIC y utilizarlas de forma eficiente. Como material didáctico se sugiere la utilización de un organizador gráfico, problemarios, software para presentaciones electrónicas y software educativos (SEP, 2013, p. 42). Lamentablemente el rol del maestro señalado por muchas instituciones educativas, no contemplan el uso de las TIC, y se desconoce el manejo de software de geometría dinámica. A esto se añade el "factor tiempo" que no permite que se desarrollen todos los temas propuestos desde el inicio del año escolar.

El estudio de la elipse en la mayoría de las instituciones de preparatoria sigue los respectivos planes curriculares analizados anteriormente, pero enfocados a una enseñanza tradicional en la que se acude a la definición que los textos contienen; según Aebli (1995, p. 160) **"**la enseñanza escolar toma de los libros *conceptos objetivizados***,** es decir, aquellos que son inteligibles para los estudiantes, evocan en su pensamiento representaciones precisas, y construyen con ellos una imagen adecuada de la realidad", sin embargo, no se atiende mucho a la acción propiamente dicha, es decir, no hay una interiorización a través de actividades didácticas que le permita al estudiante tomar una aptitud activa, donde sea él mismo quien realice la acción y construya las diversas definiciones del objeto matemático. Este tipo de enseñanza tradicional planteado en muchas de las instituciones educativas, se concentra en las ecuaciones de una curva cónica relegando la parte geométrica, provocando una prematurización algebraica que sigue un proceso enfocado a la transmisión de conocimientos terminados bajo una perspectiva formal u operativa, en el cual el docente es quien guía, transmite, y delega de manera pasiva los contenidos al estudiante, y éste aprende de memoria un conjunto de conceptos y fórmulas carentes de sentido para él mismo. Un cuadro típico de esta enseñanza se ilustra cuando el profesor elabora contenidos y los expone en clase a través de una serie de conceptos que el estudiante recibe de manera pasiva mientras observa atento al pizarrón, la responsabilidad del estudiante por tanto, recae en repetir por imitación el procedimiento algorítmico que ha visto ejecutarse, y aplicarlo una y otra vez en los ejercicios que el profesor propone al terminar la clase. Por lo tanto, se requiere involucrarlos en un proceso activo de construcción de su propio conocimiento, ya que como afirma Piaget, la acción por parte del educando, es el elemento fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Citado por Cuevas & Pluvinage, 2003).

De acuerdo con lo anterior, es necesario diseñar un conjunto de actividades didácticas aplicable en cualquier institución educativa, por lo que debe regirse al currículo y hacer uso de las TIC, que permitan una mejor comprensión de los conceptos geométricos, y un aprendizaje significativo en el tiempo escolar estimado.

La razón por la cual se escogió la elipse como entrada en la propuesta sobre las demás figuras cónicas, radica en las siguientes reflexiones:

1.3. Reflexiones sobre la importancia de la elipse

La primera estrategia basada en la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) establece introducir un concepto matemático mediante un proyecto de acción práctico, es decir que el estudiante construya el conocimiento y que sea él mismo quien tome una aptitud activa desarrollando acciones dirigidas por medio de la didáctica, a partir de una aplicación en el mundo cotidiano. Por dicha razón, al inicio del desarrollo del tema de elipse, se presenta brevemente la importancia de la elipse a lo largo de la historia y algunas de sus aplicaciones más relevantes.

La elipse es una de las curvas más interesantes de la geometría analítica, por las enormes aplicaciones de la misma en diferentes ramas de la ciencia (astronomía, arquitectura, óptica, medicina, entre otros) que ha sido estudiada desde los antiguos griegos. Esta curva tuvo gran importancia en la antigua Grecia aproximadamente en el año 350 a. d. C. porque surgió del planteamiento que hizo Menecmo como solución al problema de duplicación del cubo (Heath, 2006), y a partir de allí fue de gran interés para geómetras como: Aristeo, Euclides, Arquímedes, y Apolonio quien tuvo el valor de formalizarla como curva cónica y escribir 8 libros para el tratamiento exclusivo de éstas, llamado *Cónicas de Apolonio,* siendo él quien le dio el nombre de elipse a dicha curva (Boyer, 1956, p.p. 22, 24).

Boyer (1956, p. 30) expone que el material en las cónicas de Apolonio es remarcablemente extensivo e incluye las numerosas propiedades en estas curvas haciendo referencia a la parábola, elipse e hipérbola.

Una de las propiedades de la elipse es la reflexión, en la cual un rayo u onda que emana de un foco de la elipse, se refleja en ella hacia el otro foco (De Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, Ramírez, 2001, p. 492). Esta propiedad se presenta en diversas aplicaciones como en la medicina, acústica, arquitectura, y es incluso fuente de actitudes supersticiosas en algunas capillas, como la del desierto de los Leones en México. A continuación se mencionan algunas de las aplicaciones de la elipse, en diversas ciencias:

En la medicina se ve aplicada en un procedimiento médico denominado *litotricia*, que utiliza ondas de choque para romper cálculos que se forman en el riñón. Para llevarlo a cabo, se maneja un dispositivo llamado *litotraptor* (Figura 1) el cual consiste en un medio elipsoide lleno de agua que se sitúa pegado al cuerpo del paciente; en el foco de esta elipsoide va posicionado un electrodo generador de ondas de choque, y el otro foco se ubica dónde están los cálculos renales, de modo que las ondas de choque rebotan con la superficie reflectora de la media elipsoide convergiendo hacia al otro foco, desintegrándolos finalmente.

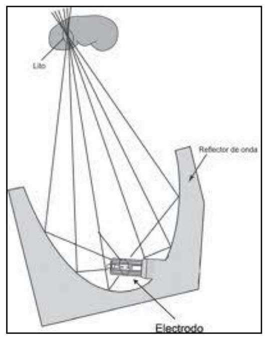


Figura 1. Litotraptor

En la acústica, existen antiguas construcciones como la basílica de San Pablo en Inglaterra, el salón de las estatuas del capitolio de Washington D.C., el tabernáculo mormón en Salk Lake City, y la galería de los susurros o capilla de los secretos en el desierto de los Leones en el Distrito Federal de México (UCNCIMix, 2009). Estas construcciones tienen en común una cúpula de forma semi-elipsoide, que visto por un corte transversal se aprecia una elipse; si una persona situada en un foco habla murmurando, sólo puede ser escuchado por otra persona situada en el otro foco.

En la Astronomía se marcó un gran hecho en la historia de la ciencia y el mundo, con la aplicación de la elipse para describir la trayectoria de las órbitas planetarias alrededor del Sol. Este hecho de mayor trascendencia planteado por Johannes Kepler (1571-1630) revolucionó el pensamiento astronómico y científico que se tenía hasta ese momento sobre la dinámica de los cuerpos celestes, derrocando el modelo geocéntrico de Ptolomeo que perduró por varios siglos. La siguiente ley enunciada por Kepler presentada a continuación no pudo llevarse a cabo sin la ayuda de las observaciones de Tycho Brahe (1546-1601):

“Johannes Kepler cuando estudiaba el movimiento de Marte, al aplicar el modelo de Copérnico de órbitas circulares alrededor del Sol, observó que los cálculos discrepaban ligeramente de la posición real del planeta en el firmamento. Así que intentó ajustar la órbita a otras curvas y finalmente, encontró que la elipse se ajustaba maravillosamente a ella” (De Oteyza et all, 2001, p. 492)

Así encontró su primera ley de movimiento que dice:

“Cada planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol, siendo el Sol uno de sus focos”. (Hewitt, 2004, p. 192).

En la arquitectura, una de las construcciones más impresionantes en forma elíptica fue el coliseo romano y la *Plaza de San Pedro* en Roma, construidos en el siglo I y XVII respectivamente, los cuales fueron considerados como dos de las más grandes construcciones en el mundo y que en común tienen forma elíptica (Figura 2):

Figura 2. Plaza de San Pedro y Coliseo Romano-Ciudad del Vaticano, Roma.

Existen muchas más aplicaciones referentes a la elipse, y a consideración personal se escogió el movimiento planetario, por su trascendencia y utilidad para estudiar algunas características de la elipse como la excentricidad.

1.4. Pregunta de investigación y propuesta didáctica

Hemos expuesto la problemática sobre los subtemas que tradicionalmente se abordan en la enseñanza de las cónicas, y particularmente de la elipse tanto en libros de texto como en los planes curriculares educativos. La falta de una planeación de actividades en los temas de Matemáticas y el no uso de herramientas tecnológicas acompañado de una didáctica en la enseñanza de las cónicas, ha llevado a plantear el siguiente cuestionamiento y propuesta que constituye la pregunta de investigación de este trabajo:

¿Cómo introducir una curva cónica mediante el empleo de la tecnología digital, dentro de un marco didáctico para promover una mejor comprensión?

Teniendo en cuenta los planes curriculares y secuencia de los libros de texto, una ruta cognitiva para la enseñanza de las cónicas que sigue el presente trabajo de investigación es la siguiente:

1) Iniciar con la definición de lugar geométrico de la cónica, la cual se puede hacer de varias formas, sin embargo mediante una investigación, entrevista a docentes, consulta de programas curriculares y libros de texto en uso, se concluye que la definición más usual es:

    Para el caso de la parábola es la de foco-directriz, como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta *l* llamada *directriz,* a un punto F exterior a ella.

    Para la elipse e hipérbola la definición más usual es la bifocal, como el lugar geométrico de los puntos tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos sea igual a una constante (caso de la elipse) y el lugar geométrico de los puntos tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos sea una constante (caso de la hipérbola).

Para la construcción de la definición de lugar geométrico de una cónica, no se debe caer en la metodología de la enseñanza tradicional, como por ejemplo: para la parábola, se parte de la definición formal como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta *l* llamada *directriz,* a un punto F exterior a ella, lo cual es una definición clara y “objetiva”, es decir según Aebli (1995) aquella definición elaborada y redactada de una manera precisa y formal, en la cual el estudiante no interioriza o construye las diferentes definiciones, sino que las aprende de memoria. En consecuencia, se refleja un alto índice de reprobación y el poco conocimiento conceptual en estudiantes de preparatoria y universitarios, como en el caso del Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, que según González (2010) los índices de reprobación de Matemáticas para el 2010 de un curso de precálculo (donde se ve Geometría Analítica) y de Cálculo diferencial, fluctúan entre el 75% y 85%.

2) Se plantea de inicio un proyecto de acción práctico o concreto, en el que la definición de la respectiva cónica sea construida a partir de una aplicación, por ejemplo: para el caso de la parábola puede ser un lanzamiento parabólico en baloncesto, la trayectoria del agua en una determinada fuente; para el caso de la elipse puede ser la construcción de un jardín o vitral por el método del jardinero, o el movimiento planetario; y para la hipérbola la construcción de la estructura externa de una planta nuclear, o el movimiento de un cometa. Lo anterior también sirve para visualizar la respectiva cónica como un primer nivel de pensamiento geométrico establecido por el modelo de Van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 1990)

A diferencia de la enseñanza tradicional la cual deja las aplicaciones para lo último, en las actividades propuestas, se parte de un problema en contexto como lo sugiere la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003). Esto es importante en la medida que se aprecia la parte funcional de los objetos matemáticos, es decir, según Aebli (1995) el conocimiento puede resultar interesante por sí mismo al saber cómo funcionan o se hacen algunas cosas, a partir del uso de la matemática.

De acuerdo al marco didáctico, es importante que el estudiante siempre realice la acción a través de las actividades. Para lograr la acción individual en un grupo de estudiantes, se hace uso de la tecnología donde el estudiante adquiere una aptitud activa al poder mover y modificar objetos geométricos, e interactuar con escenarios que se pueden desarrollar en un software de Geometría dinámica, como ejemplo para la elipse: el estudiante puede realizar el trazo de ésta, simulando el método del jardinero, y siendo guiado por la didáctica establecida en las actividades, logre construir las ideas referentes a la definición del lugar geométrico de la elipse de una manera activa, y no verbal como se hace en la enseñanza tradicional.

3) A partir de la construcción de la figura cónica, se identifican elementos que caracterizan dicha curva, como focos, centro, vértices, y luego elementos más particulares de cada cónica, así como algunas de sus propiedades más representativas y parámetros, como lo sugiere el nivel II de análisis de Van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 1990)

4) Después del estudio de los elementos de la cónica, y a partir de su construcción geométrica, se definen variables en el plano cartesiano, y se construye algebraicamente la ecuación que modela dicha curva. Es necesario para ello guiar al estudiante en los diferentes procesos algebraicos necesarios para demostrar la ecuación, y ejercitar operacionalmente en los diversos registros de representación gráfico y algebraico, a través de la operación inversa propuesta en la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), en la que dada la ecuación o condición algebraica, el estudiante debe hallar los elementos de la cónica para posteriormente graficarla, y viceversa. En esta fase se pretende desarrollar un nivel III de clasificación de Van Hiele (Jaime & Gutiérrez) en la que el estudiante sigue demostraciones y establece relaciones entre la ecuación de la cónica y su representación gráfica.

La construcción algebraica de la ecuación de una cónica no se debe limitar al aprendizaje memorístico de éstas, así como en la metodología tradicional donde el estudiante toma una aptitud pasiva, enfocándose a trascribir lo que el profesor realiza en el pizarrón. Sin embargo, no se niega la potencialidad de los métodos algebraicos en las cónicas, pues éstos son la esencia de la Geometría Analítica del legado de Descartes, pero el resolverlos sin profundizar en el registro geométrico, explorando las propiedades de las curvas cónicas, podría traer como consecuencias obedecer a patrones establecidos, fórmulas sin sentido donde el estudiante solo sustituye valores numéricos, y los objetos matemáticos se tornan ausentes en contextos de aplicación. Por lo anterior muchos estudiantes tienen la creencia de que resolver problemas de Matemáticas significa memorizar fórmulas, hacer operaciones puntuales y manipular signos que para ellos carecen de significado, despreciando y marginando hasta donde sean posibles los conceptos y significados precisos.

En resumen, la propuesta de investigación planteada encierra los mundos de la Matemática, la didáctica y la tecnología digital; donde el tema de matemáticas que se desarrolle será mediado por el uso de la computadora en actividades guiadas por cuestionarios e indicaciones del docente, enmarcadas en un programa didáctico específico.

La importancia de diseñar un conjunto de actividades bajo un marco didáctico radica en promover una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, y en este caso, la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) propone una serie de puntos, en los que menciona que el estudiante es quien debe realizar siempre la acción por medio de ejercicios dosificados, hasta llegar a construir las diferentes definiciones que forman determinado concepto matemático. Existen diversos trabajos de investigación donde se diseñan actividades haciendo uso de la tecnología, bajo el marco de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), como se puede ver en Betancourt (2009), González (2010), Rodríguez (2012), Carbajal (2013), etc. En González (2010), se implementó el uso de Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI), bajo la didáctica, concluyendo que "*en la experiencia didáctica, resulta atractivo y motivador para los alumnos, el resolver un problema real e ir construyendo las ideas y conceptos matemáticos*" (p. 76); por otra parte Carbajal (2013) hizo uso del software LIREC enmarcado en dicha didáctica, concluyendo que ésta promueve una mejor comprensión en los conceptos geométricos, particularmente en el caso de la recta como lugar geométrico.

Por el grado de exigencia que hay en un proyecto de tesis de maestría, se pondrá como ejemplo introducir la elipse en un entorno digital interactivo apoyado en la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003). La forma de enseñanza de la elipse se resume en los cuatro pasos anteriores de la ruta cognitiva propuesta, que también puede ser utilizada para la enseñanza de cualquier otra cónica.

1.5. Objetivo

- Diseñar una propuesta para la enseñanza de conceptos matemáticos en la Geometría Analítica apoyada en las tecnologías digitales dentro de un marco didáctico, que promueva un mejor equilibrio entre el pensamiento geométrico y el algebraico. En particular, desarrollar una serie de actividades didácticas para promover una mejor comprensión de la curva cónica elipse, como ejemplo del estudio de las demás figuras cónicas en el aula, apoyadas en la didáctica de Cuevas & Pluvinage, el modelo de los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele, y el uso de software de Geometría dinámica.

Capítulo II. Marco didáctico, computacional y conceptual

En este capítulo se presentan las principales características de la didáctica de Cuevas & Pluvinage, y el modelo de Van-Hiele utilizados en el diseño de las actividades. Se aborda la evolución de la didáctica a lo largo de la historia con los postulados de algunos de los máximos representantes de las diferentes escuelas de la psicología del aprendizaje como la activa, Piagetiana y de Hans Aebli, culminando de esta forma con la didáctica para la enseñanza de las matemáticas de Cuevas & Pluvinage, y posteriormente con los niveles de Van Hiele que muestran el desarrollo de un pensamiento geométrico

En el marco computacional se analiza cada una de las dimensiones de las TIC enfocadas hacia el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como el uso de un buen software educativo. Por último, se presentan algunas consideraciones matemáticas de algunos conceptos de la elipse, elementos, caracterizaciones y aplicaciones relevantes, necesarias para el desarrollo de las actividades.

2.1. Teorías del aprendizaje y evolución de la didáctica

(…) Si bien, no es posible decir cuál es la mejor forma de enseñar, si cual no es la adecuada. Cuevas.

2.1.1. La enseñanza tradicional

Una de las formas tradicionales de conducir un curso de matemáticas, consiste en que el docente realiza la mayor parte de la actividad en clase ilustrando con problemas y su resolución cada uno de los temas. Iniciemos ilustrando nuestra situación actual con base en afirmaciones dadas por Cuevas (2003) y Cruz & Mariño (1999), en la enseñanza de las matemáticas con una obra de teatro: una clase tradicional de geometría analítica.

Un salón tradicional, cuatro paredes y una puerta, con un pizarrón al frente en el cual, de espaldas al grupo, se encuentra un maestro.

-Maestro: Una elipse es un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante mayor a la distancia entre los dos puntos

(Se escucha un murmullo, como un ligero coro que acompaña el enunciado...)

El maestro, ilustra en el pizarrón lo dicho, con una figura en forma de elipse y continúa escribiendo….La elipse tiene los siguientes elementos (en seguida los ilustra en la figura dibujada en el pizarrón, y empieza a mencionar el significado de cada uno de ellos, como focos, vértices, eje focal y normal, cuerda focal, distancia focal, eje mayor y menor, entre otros).

-Estudiantes: Por favor maestro no borre la gráfica, y por favor repite de nuevo lo que significa cada uno de ellos, porque vas muy rápido.

-Maestro: Las ecuaciones canónicas para la elipse son $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si es una elipse horizontal, pero si es vertical entonces la ecuación será $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ y la fórmula que relaciona a (longitud del semieje mayor), b (longitud del semieje menor) y c (distancia del centro al foco) es: $a^2=b^2-c^2$

(El maestro voltea para ver de reojo el comportamiento del grupo y continúa escribiendo y hablando. Los estudiantes, acostumbrados a este tipo de enseñanza, empiezan a repetir mentalmente o en voz baja “equis al cuadrado-entre a al cuadrado....” confiando que mediante esta repetición verbal, llegarán a aprenderse de memoria la esperada fórmula en el curso de matemáticas).

-Maestro (con voz cansada): Veamos ahora un ejemplo.

Si tenemos que la longitud del semieje mayor de una elipse horizontal es $a=5$ y la distancia del centro al foco es $c=4$. Hallen la ecuación canónica de dicha elipse.

El maestro acompaña con su voz lo que escribe, y continúa:

Sustituimos los valores de $a=5$ y b, valores en la fórmula anterior, pero como no tenemos b, entonces usamos la fórmula de $a^2=b^2+c^2$, despejando b, tenemos $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$. Luego, la ecuación sería:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

-Maestro: Ahora hagan Uds. el siguiente ejercicio:

Hallar la ecuación de la elipse vertical que tiene un semieje mayor de 10 unidades, y un semieje menor de 6 unidades. ¿Quién quiere pasar a hacer un ejercicio?

(...Se escuchan murmullos del grupo de estudiantes, y se para un estudiante)

Estudiante: Maestro, no vaya a borrar la fórmula, por favor.

Fin de la obra.

Probablemente, muchos docentes coincidentemente se identifiquen con el anterior ejemplo, el cual refleja un proceso de la enseñanza tradicional, que consiste en que el estudiante sólo repite y memoriza las fórmulas e imágenes del pizarrón. Como se detalló en el ejemplo, el problema se centra en encontrar la fórmula adecuada y sustituir los valores numéricos dados, demeritando la definición del objeto geométrico y el estudio de sus propiedades, que si bien fueron dadas por el maestro, se hizo de una forma verbal y objetivizada, es decir según Aebli (1995) de forma ya elaborada, que evitan que el estudiante reflexione y construya el concepto.

Como se puede apreciar, la enseñanza tradicional, basada en la didáctica “sensorio-empirista” consiste en que el estudiante, al ver las imágenes en el pizarrón, las registre y con ello pueda repetir el proceso. Esta didáctica tiende hacia la construcción de hábitos en el estudiante, y no hacia la comprensión del concepto.

En el ejemplo, también se observa la repetición verbal de las definiciones, que como un reflejo, constituye el llamado “hábito sensorio-motor” o dicho de otro modo, las palabras constituyen así los signos, solo que carentes de significado. La enseñanza sensorio-empirista conduce a una educación rutinaria, incomprensible y compleja, además, presenta la matemática como algo ajeno a los intereses del estudiante (Cuevas & Pluvinage, 2003). Por todo ello, la matemática se le muestra al estudiante, más como obstáculo que como una necesidad, la cual no le es útil para explicar el entorno en el que vive, impidiéndole enfrentar situaciones imprevistas en las que pudiera aplicar su conocimiento.

El marco didáctico sensorio-empirista, marca al estudiante como un espectador pasivo, donde el maestro es quien delega y da los conceptos ya elaborados. En efecto, el surgimiento de la escuela activa, en el siglo XIX, resaltó la importancia de la actividad efectiva del individuo en el proceso del aprendizaje, mostrando lo ineficiente del marco didáctico sensorio-empirista, pues ante un estímulo sensorial, existe una respuesta motriz en el individuo que no es pasiva, sino que por el contrario es dinámica.

2.1.2. Escuela activa

Después de la escuela tradicional surgió la escuela activa, que fundamenta la actividad del educando como algo vital y de gran importancia para su aprendizaje. El individuo mismo es quien efectúa las acciones concretas (que posteriormente Piaget retoma como *acciones efectivas*) para la adquisición de los conceptos o nociones que se pretendan enseñar. Sus máximos precursores fueron: Dewey, Montessori, Decroly Claparède, y Freinet (Château, 2001). En común todos recalcan la importancia de que el educando realice la actividad y tenga un grado de libertad al hacer las cosas, sin requerir de la autoridad del profesor al dirigir completamente las acciones del estudiante, generando la posibilidad de que él plantee su propio espacio hacia el descubrimiento.

La didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) toma como gran importancia este punto, y sugiere que el estudiante sea quien siempre realice la acción siendo guiado por el maestro. Realizar una acción no siempre se refiere un esfuerzo físico, sino puede ser mental, por eso una forma que el estudiante realice acciones es por medio de la resolución de problemas, los cuales se deberán plantearse gradualmente hasta llevar al estudiante al concepto deseado, puesto que como dice Halmos:

> El modo más efectivo para enseñar matemáticas es resolviendo problemas, desafiar constantemente a los alumnos con problemas que estén justo al alcance de su mano (Halmos, P. 1994. p. 851).

Teniendo en cuenta lo anterior, el estudiante es quien debe adquirir una aptitud activa, y el maestro ser un guía para él. El dirigir las acciones no se trata de dar órdenes sino de suministrar al estudiante los conocimientos previos y pautas para poder llegar a los conceptos. Halmos (1994) argumenta la importancia de que el individuo realice por sí mismo las acciones, y sugiere al maestro conducirse más como un coach o entrenador que como un "maestro":

> *…considerar el papel de un maestro como el de un entrenador. Ciertamente, nadie puede nadar por mí, nadie puede tocar el piano con mis dedos, y nadie puede hablar francés por mí, pero alguien puede ahorrarme mucho tiempo si me enseña rápidamente el camino correcto (p. 850)*

En seguimiento de la escuela activa, J. Piaget resaltó la acción como elemento fundamental del pensamiento. Por otra parte, Hans Aebli propuso los cursos de acción como una forma de enseñar al estudiante, a partir de las acciones encausadas a la construcción de los conceptos.

2.1.3. Teoría Piagetiana y de Hans Aebli

J. Piaget y Hans Aebli conformaron una escuela más moderna. Para Piaget, "*el elemento fundamental del pensamiento es la acción"* (Piaget, 1947, citado de Aebli, 1995), pues cada operación matemática surge a partir de ella, es decir, para la adición la acción de juntar cantidades, la sustracción de retirarlas, la multiplicación de tomar repetidas veces una misma cantidad; y la división, de retirar repetidas veces una misma cantidad total, o bien de distribuir una cantidad total en un determinado número de partes iguales.

Por otra parte, Aebli (1995), menciona que antes de iniciar un determinado tema, el profesor debe elaborar un plan o "curso de acción" donde sea el estudiante quien desarrolla y construye los conceptos, y el maestro solo dirige de manera lógica al educando, suministrando problemas que puedan a su vez ser indicaciones, que proporcionen elementos para que sea el mismo estudiante quien construya la solución del problema. A este principio Aebli le llamó el principio de mínima ayuda.

Pero ¿qué se puede plantear en un curso de acción para que el estudiante adquiera una aptitud activa? Como ya habíamos mencionado, una forma que el estudiante se mantenga activo y realice acciones mentales, es a través de la resolución de problemas cuya idea esencial en la enseñanza de las matemáticas es que el alumno resuelva diferentes problemas matemáticos en los que se enfrente a una diversidad de situaciones, en donde sea necesario analizar y evaluar numerosas estrategias en la solución de éstas. Sin embargo, muchos de los problemas resultan complicados para el estudiante por lo que sugiere Polya (1945) *métodos heurísticos*, para subdividirlos en cuatro etapas que son: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución de un plan y visión retrospectiva. Así mismo los esposos Van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 1990), proponen para la enseñanza de la Geometría, una serie de niveles jerarquizados en los cuales el estudiante aprende los conceptos de manera dosificada.

Muchos de los planteamientos anteriores, provenientes de la principales teorías del aprendizaje, son fundamentales en el planteamiento de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), las cuales enmarcan el diseño de actividades del presente trabajo.

2.1.4. Modelo didáctico Cuevas-Pluvinage

La didáctica para la enseñanza de las Matemáticas Cuevas & Pluvinage (2003), expone sus ideas con base en la teoría Piagetiana, en Aebli, en Clapárede, en Dewey, y en general de casi toda la escuela activa; y también en aportes recientes como la de Duval y Brousseau. Esta didáctica se utilizó como modelo didáctico para el diseño de las actividades del presente trabajo, de acuerdo con las siguientes características propias de la didáctica Cuevas-Pluvinage (2003):

La acción

El primer punto de la didáctica de Cuevas y Pluvinage se refiere a la importancia de la acción por parte del estudiante en el proceso enseñanza y aprendizaje.

En el aula de clase es importante que el estudiante esté ejecutando siempre una acción mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, y construya el concepto deseado (Cuevas & Pluvinage, 2003, p. 275).

Por ejemplo, para aprender la definición de elipse como cónica se puede partir del hecho histórico de formarla a partir del corte a un cono con un plano, de modo que el estudiante después de realizar la acción puede interiorizar tales conceptos y ser consciente de la relación inherente que hay de la elipse con un cono, en este sentido se podría introducir mediante las esferas de Dandelin (Schmidt, 1993). Otra forma, es mediante su definición como lugar geométrico realizada por medio de actividades interactivas en Geogebra, donde el estudiante puede interactuar, y realizar acciones simuladas hasta el trazo de una elipse. La acción podría permitir al estudiante adquirir una aptitud activa y no ser un simple espectador en el aula.

Problema en contexto

Otro punto importante del modelo didáctico es introducir un concepto matemático mediante la resolución de un problema en contexto de interés para el estudiante. Es muy común que los estudiantes pregunten, *¿y esto para que me sirve….?* Como se ha analizado en algunos textos de matemáticas, la forma particular de enseñanza, es dejar siempre al final del tema las aplicaciones, y por los tiempos acotados en la enseñanza casi nunca se cubren; siendo que éstas son las que dan sentido a la parte funcional de las matemáticas en la vida real.

Por ello es importante iniciar con un problema que plantee una situación real, proponer ejercicios que generen soluciones bajo una forma estructurada y coordinada, llegue a designar el concepto matemático deseado (Cuevas & Pluvinage, 2003, p. 275). Un ejemplo de cómo se planteará en las actividades de la elipse es el siguiente: para entender la definición de lugar geométrico de la elipse ligado con la realidad se puede proponiendo a los estudiantes construir un jardín en forma de elipse utilizando el *método del jardinero* (Figura 3), el cual consiste en clavar dos estacas en dos puntos fijos y a ellos unir un hilo de mayor longitud a la separación de las estacas. Luego se tensa el hilo con una tercera estaca o marcador, de modo que al deslizarlo se obtiene el trazo de una elipse. Una vez realizada la acción del trazo simulado, se pueden hacer mediciones de cada estaca fija a un punto sobre la elipse, de modo que al sumar dichas longitudes se concluya que siempre es constante para todo punto sobre la curva, lo cual define la condición de elipse como lugar geométrico.

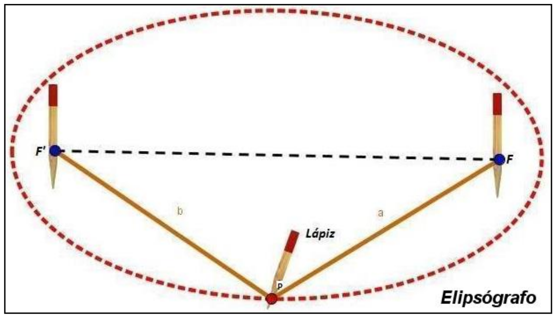


Figura 3. Construcción de la elipse por medio del método del jardinero

Según Aebli (1995, p. 232) las aplicaciones decisivas de los conceptos que se transmiten en clase tienen un lugar en situaciones de la vida real. El profesor debe plantear constantemente a los estudiantes, cuestiones que les transmitan un punto de vista que permita comprender el mundo. La inclusión en el contexto de una acción nos asegura también, con frecuencia, el interés de los estudiantes que no se interesarían por el mero tratamiento teórico del proceso del tema (Aebli, 1995, p. 161). Por otra parte, Reeuwijk (1997, p. 13) señala que los contextos y la vida cotidiana deberían desempeñar un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación, sino también en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los estudiantes descubren o aún mejor reinventan las Matemáticas. Luelmo (1997, p. 7) puntualiza:

> *"Las situaciones reales bien elegidas y adaptadas a los estudiantes, constituyen un elemento motivador. Por tanto, los contenidos matemáticos que en ellas pueden aprenderse, no sólo adquieren significado desde un punto de vista intelectual, sino relevancia, en cuanto que se aplican a una situación personal o profesional interesante. El reto para el profesorado estriba, por tanto, en seleccionar situaciones que movilicen emotiva e intelectualmente al alumnado"*

En trabajos más recientes donde se aplicó la didáctica Cuevas & Pluvinage, Betancourt (2009, p. 161) concluye que: "*de la experiencia didáctica, resulta significativo para los alumnos, además de motivante, el resolver un problema real e ir construyendo las ideas* *y conceptos del contenido matemático, en lugar de iniciar con definiciones y teoremas"*.

Comprobar los resultados

Cuevas & Pluvinage (2003, p. 276) propone que una vez resuelto un problema, el estudiante debe comprobar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo con el problema planteado.

Dividir en sub-problemas

Aprender un concepto de forma objetivizada o ya terminada, evita al estudiante participar en el desarrollo de procedimientos y acciones que le permitan construir el mismo. Por eso es necesario, dividir el problema en sub-problemas que representen las operaciones parciales hasta llegar a integrar nuevamente la solución completa, por lo que un plan de acción que dosifique los ejercicios ayudará al estudiante a llegar a la solución o construcción de los conceptos de forma coherente y ordenada.

Para entender el concepto de la elipse como ecuación, fue necesario dividir el problema en varias etapas, las cuales exigen un conocimiento previo para su demostración, como la semejanza de triángulos, completar el trinomio cuadrado perfecto, despeje de variables en ecuaciones, resolución de ecuaciones de segundo grado, entre otros.

La operación inversa

Cada vez que se presenten las operaciones directas asociadas a un concepto, de ser posible, se deben implementar ejercicios que representen a la operación inversa asociada (Cuevas & Pluvinage, 2003, p. 277). Para las actividades se plantean ejercicios del estilo de los dos problemas fundamentales de la Geometría Analítica que son:

I. Dada la ecuación interpretarla geométricamente, es decir construir la gráfica correspondiente.
II. Dada una condición geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación (Lehmann, 1989, decimotercera reimpresión, p. 32)

Un ejemplo en modo general para la elipse es: Dada la ecuación canónica de la elipse, se pide extraer los parámetros a, b y/o c y construir la gráfica; el caso inverso es dada la elipse gráficamente, obtener sus parámetros y llegar a la ecuación.

Diferentes alternativas de solución

Cuando se proponga un método de resolución de un problema se debe intentar dar una forma alternativa de solución, si esto no es posible, entonces no imponer una sola forma de solución. Este punto permite, a los estudiantes, la libertad de plantear sus propios métodos de solución (Cuevas & Pluvinage, 2003, p. 277). Por ejemplo Contreras, Contreras, García (2002) proponen una serie de construcciones sintético-analíticas a su criterio llamativas para llegar a la ecuación de la elipse.

Problemas dosificados

Elaborar los problemas de acuerdo con el principio de adecuación óptima; es decir, que la dificultad de los problemas sea gradual de manera que requieren del esfuerzo del estudiante para fomentar su interés, pero no en exceso como para desanimarlo (Cuevas & Pluvinage, 2003, p. 277). Los niveles de Van Hiele se pueden reinterpretar bajo el presente punto de la didáctica, de modo que el diseño de actividades se puede dosificar en niveles, que desarrollen un pensamiento geométrico jerarquizado.

Mínima ayuda

El principio de mínima ayuda consiste en dar al estudiante los elementos necesarios, para que construya por sí mismo las diferentes definiciones matemáticas, mediante un serie de indicaciones, sin que éstas sean demasiado directas. En el laboratorio el estudiante resuelve los problemas pidiendo ayuda al profesor, el cual solo proporcionará la ayuda mínima necesaria tratando siempre de que sea el estudiante quien construya su conocimiento (Cuevas & Pluvinage, 2003, p. 278).

Diferentes registros de representación semiótica

Según Duval (1998), es fundamental para el proceso cognitivo del pensamiento humano, el poder visualizar un determinado concepto matemático en los diversos registros de representación que le sean propios, y así mismo afirma:

> La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece así como fundamental para una aprehensión conceptual de los objeto: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones (p. 176).

La didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) toma algunas de las ideas teóricas de Duval, y sugiere que cada vez que se propongan problemas que apoyen la enseñanza de un determinado concepto matemático, en un determinado sistema o registro, se debe plantear actividades semejantes al mismo, en los diversos sistemas de representación que le sean propios, si la actividad lo permite (p. 280). En este sentido el uso de GeoGebra promueve de manera importante el trabajo en los diversos registros, y de esta manera favorece la conversión entre lo geométrico y algebraico. En el sentido de Cantoral & Montiel (2003), el visualizar un objeto matemático (en tal caso una función) no es simplemente ver su gráfica, sino es una forma de cómo aprende el estudiante, al llevar la información a su pensamiento y en su lenguaje, lo cual requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a diferentes registros de representación como el gráfico, numérico y algebraico, incluso el mismo lenguaje común para expresar sus experiencias vivenciales.

Análisis complejo del concepto

Plantea la necesidad de establecer problemas en donde el concepto recién adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo (Cuevas & Pluvinage, 2003, p. 280). Un ejemplo es que el estudiante use las definiciones adquiridas por medio de actividades, y posteriormente sea capaz de aplicarlas para la interpretación y solución de problemas reales.

2.2. Marco Computacional

La NCTM (2008) menciona que la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje de las matemáticas, en el siglo XXI, y todas las escuelas deben de asegurar que sus estudiantes tengan acceso a la tecnología. Profesores efectivos, maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión en los estudiantes, estimular su interés e incrementar su eficiencia en matemáticas.

2.2.1. Las TIC

Según González (2010, p. 11), las tecnologías de la Información y comunicación (TIC) son aquellas herramientas, procesos y productos del conocimiento humano que en el momento de estar en un determinado contexto permiten mejorar la información y la comunicación bajo la condición de que con su uso se fortalezcan y desarrollen procesos cognitivos, es decir, que contribuyan a que las personas se relacionen, colaboren y aprovechen su capacidad de reflexionar lógica y creativamente. Algunos ejemplos de estas tecnologías son las redes sociales, correo electrónico, navegadores, buscadores, los blogs, el podcast, la Web o Internet, software educativo, etc.

De acuerdo con Santos (2004) un objetivo importante de la instrucción matemática es proveer un ambiente adecuado para los estudiantes, en el cual tengan la oportunidad de demostrar sus propias ideas sobre la manera de hacer frente a los problemas matemáticos; así el profesor al utilizar alguna herramienta tecnológica, dispone de un medio para presentar a los estudiantes distintos conceptos o procedimientos de una forma atractiva y dinámica, promoviendo en ellos la reflexión, y el análisis al trabajar de una forma experimental, interactuando con objetos matemáticos, construirlos, analizando comportamientos, comprobar propiedades, hacer conjeturas, realizar simulaciones, etc.

Sin embargo, el uso de las TIC no sólo ofrece ventajas, ni se debe pensar que éstas sustituyen al profesor solucionando todos los problemas en la educación, por eso su aplicación es un hecho incuestionable en la medida que esta requiere de un marco didáctico. Las TIC introducen nuevos problemas como: notación lineal, aproximación numérica, aproximación gráfica, etc, que se debe tener un cuidado cuando se introducen en el aula (Konold y Lehrer, 2008; Moreno y Santos-Trigo, 2008; Tabach, Hershkowitz, Arkavi y Dreyfus, 2008; Yerushalmy y Chazan, 2008).

A continuación, se presentarán varios puntos que resaltan las ventajas y desventajas del uso de las TIC.

Ventajas de las TIC

- Permite el aprendizaje interactivo y la educación a distancia (González, 2010, p. 12).
- La utilización de las TIC en la enseñanza ofrece la posibilidad de promover notablemente una nueva visión de las matemáticas, porque esta tecnología puede permitir hacer de la enseñanza algo experimental y modelar fenómenos físicos.
- La computadora puede ser una herramienta que permite un proceso dinámico de generación del contenido matemático (Tall, 1990).
- Promoverá aprendizajes significativos porque conseguirá en los alumnos: una mejor comprensión de los temas; desarrollo de habilidades; autonomía; y confianza en los aprendizajes (McFarlane, 2001)

Desventajas

- Existe un cierto analfabetismo computacional que hace que los maestros, vean con desconfianza y temor el uso de las TIC. Esto hace que los docentes no puedan apreciar su potencialidad como herramientas de aprendizaje McFarlane (2001). Sin embargo, se deben promover el uso de herramientas computacionales, y vencer el temor a usarlas para la enseñanza.
- Trabajar con las TIC implica muchos obstáculos técnicos imprevistos, como: equipo en mal estado, problemas con el servidor local, problemas de red y problemas con la comunicación externa (Firewall). Los obstáculos y los problemas muestran la necesidad de una planificación cuidadosa, supervisión de los recursos, en este tipo de cursos (González, 2010, p. 12).
- Número limitado de computadoras disponibles y competencia de uso con otras materias de la especialidad.

- Se percibe una opinión de profesores en contra de la utilización de la tecnología, como lo menciona Antolín (2008), "muchos docentes me han manifestado su preocupación y temor de que estas tecnologías los estén rebasando, ya que no solo la saben manejar, sino que en su vida cotidiana se han convertido en simples objetos de consumo, sin una finalidad educativa".
- Enseñar con computadoras, sin prever el grado de avance de los estudiantes en clase, incrementa la complejidad de gestión en clase. Lo cual origina estrés tanto en el estudiante como en el maestro.
- Desestimar la destreza operativa.
- Darle demasiado crédito y fiabilidad a sitios en la red.
- Apoyar la enseñanza con las TIC, sin un diseño previo de la actividades, previendo en el contrato didáctico la participación de las mismas; puede traer más desconcierto que beneficios.
- Es un doble reto para los sistemas educativos en los países en desarrollo, pues además de incorporar las TIC a la escuela a través de un uso apropiado para la enseñanza y el aprendizaje, se debe afrontar el hecho de que la mayor parte de los docentes y de los alumnos no posee las competencias informáticas básicas.
- Distracciones, dispersión, pérdida de tiempo, informaciones no fiables, aprendizajes incompletos y superficiales, visión parcial de la realidad, ansiedad y dependencia de los demás.
- Necesidad de un diseño cuidadoso de programas académicos que incluya interacciones con otras asignaturas y el uso de la computadora (Tall, 1990).

Como se puede apreciar, las desventajas son factores que se pueden controlar, y evitar que opaquen el uso de las tecnologías para la enseñanza-aprendizaje.

2.2.2. Software educativo

Las Nuevas tecnologías de la información traen grandes ventajas cuando se utilizan adecuada y correctamente; es por esto que nace la necesidad de realizar capacitaciones, en pro de actualizar el modelo del conocimiento con base en las herramientas de las TIC enfocadas en el cómputo. De acuerdo con Cuevas (1998, p. 274) la computadora es en este contexto es un medio y no un fin, por ende es una herramienta que auxilia a realizar diversas tareas dentro del complejo mundo de la enseñanza de las matemáticas. Para la enseñanza de cierto tema no se puede usar cualquier software educativo, éste se debe adaptar a las necesidades y propósitos específicos, y por dicha razón se cuestiona lo siguiente: ¿Qué características debe tener un buen software educativo? ¿Qué software educativo cumple con muchas de esas características para poder introducir una cónica en el aula?

A continuación se dará una respuesta a estos interrogantes, con base en las sugerencias de Mochón (2006) e investigaciones alusivas al uso de software de geometría dinámica.

Características de un buen software educativo

Saber las características de un buen software educativo permite escoger el más apropiado para el uso de la enseñanza de las matemáticas. Mochón (2006), menciona que un software educativo debe ser dinámico, interactivo, exploratorio, abierto, universal, no denso, concentrado, social, didáctico y guiado

Dinámico se refiere a la acción, movimiento y cambio; interactivo a que el ambiente no sólo proporcione información, sino que también la reciba; exploratorio a la capacidad de procesar la información y devolver una respuesta; abierto a la capacidad del ambiente de ser utilizado en distintos modelos didácticos; universal a la independencia de un periodo o grupo específico; que no sea denso a lo conciso de los textos (ayuda, información, etcétera) y a la presentación de componentes necesarios en la interfaz; concentrado al tratamiento desde varias perspectivas de una o dos ideas; social a la capacidad de fomentar la interacción entre los estudiantes; didáctico al cumplimiento de un propósito didáctico definido y centrado en el desarrollo conceptual; y guiado a dirigir a los estudiantes hacia un objetivo didáctico.

2.2.3. Software de Geometría dinámica GeoGebra

En la selección de un buen software educativo para introducir una cónica, se escogió Geogebra por ser un software de Geometría dinámica que cumple con las siguientes características:

Es dinámico a la acción, se pueden mover los objetos geométricos (Santos & Espinosa, 2002), además modificar magnitudes de segmentos por medio de deslizadores, incluir textos, activar rastro, y hacer ver objetos ya sean geométricos o textuales por medio de casillas (boléanos). Una ventaja que ofrece Geogebra es que ofrece las herramientas necesarias para construir ambientes virtuales o micromundos, haciendo interactivas las actividades por medio de simulaciones. Este software carece de un modelo didáctico, sin embargo se acomoda perfectamente en el uso de alguno. Geogebra no enseña matemáticas o geometría, no es su pretensión y para ser un verdadero apoyo a la enseñanza se requiere de un trabajo arduo que incluya un diseño de actividades enmarcados en una didáctica.

GeoGebra (www.geogebra.org) es un software de código abierto que ofrece una gran ventaja para hacer uso de él en cualquier institución. Este software integra de forma dinámica la Geometría Sintética y Analítica (Hohenwarter & Preiner, 2007). Esta característica resulta útil para el diseño de actividades donde se establezcan registros de representación geométrico y algebraico, con el fin de promover una mejor comprensión del concepto de la elipse, por medio de la creación de ambientes virtuales interactivos.

Geogebra a sido una herramienta útil para la enseñanza de la Geometría y conceptos matemáticos, cuyos resultados se reflejan en diversas investigaciones como:

En el trabajo de Iranzo & Fortuny (2009, p. 442), afirman que: "*la mayoría de estudiantes consideran que GeoGebra les ayuda a visualizar el problema y evitar obstáculos algebraicos. Así mismo, estos autores concluyen que el uso de GeoGebra promueve un pensamiento más geométrico y facilita un soporte visual, algebraico y conceptual en la mayoría de los alumnos, aunque con presencia de variedad de estrategias de resolución, las cuales pueden ser interpretadas en términos de tipologías de alumnos".*

Por otra parte, Costa (2011, p. 112), afirma que las actividades de matematización inducida en el entorno GeoGebra, dentro de un planteamiento resulta ventajoso en comparación con un planteamiento tradicional, en los siguientes modos:

- Motivación: los alumnos muestran una alta motivación.
- Implicación activa: los alumnos matematizan, reflexionan y comprenden activamente.

- Matematización alcanzada: la gran mayoría de alumnos presenta una alta consecución de resultados correctos mediante la matematización inducida en el entorno visual y manipulativo de GeoGebra. En un planteamiento tradicional no se garantiza un trabajo autónomo de reflexión y comprensión.
- Mejor rendimiento en el entorno visual y manipulativo: la comparación que se ha realizado entre los procesos de resolución con GeoGebra y en una situación convencional, señala que para actividades muy parecidas el rendimiento (medido según la consecución de resultados correctos por parte de los alumnos) es claramente más alto con GeoGebra.
- Mejor valoración por parte de los alumnos que un planteamiento tradicional.

En el presente trabajo el uso de Geogebra permitió diseñar Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI's), para introducir la elipse, como lugares simulados que no están ubicados en ningún espacio físico de nuestro mundo, pero representan virtualmente la realidad.

Se pretende con el uso de Geogebra promover una mejor comprensión de los conceptos matemáticos (en nuestro caso la elipse), dejando claro que éste o cualquier otro software de geometría dinámica, no generan por sí mismos un mejor aprendizaje, ni sustituye al maestro, por dicha razón, se requiere de la implementación de actividades interactivas bajo un marco didáctico específico, que a su vez sirvan como ente motivante, y de ayuda al estudiante en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

2.3. Modelo de Van-Hiele

El modelo de Van Hiele es importante en el presente trabajo para el diseño de actividades, los cual permiten dosificar los problemas y conceptos geométricos de manera progresiva, es decir en niveles jerarquizados de menor a mayor dificultad, lo cual es planteado en uno de los puntos de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003).

Antes de entrar a decir en qué consiste el modelo de los psicólogos matemáticos e investigadores holandeses Dina-Geldof Van Hiele y Pierre Van Hiele, se mencionará qué es un modelo según la teoría de Jaime & Gutiérrez (1990, p.p. 295-384).

En términos generales un modelo (matemático, físico, químico, psicológico) es una representación simplificada de un determinado fenómeno real. Por ejemplo, en Geometría se utilizan los prismas para modelar la estructura interna cristalina de los minerales, otros como los ábacos, bloques multibase, regletas de cuisinaire y calculadores; son diferentes modelos para representar los números, las operaciones aritméticas y sus propiedades (p. 299).

El modelo de Van Hiele está conformado por dos partes:

- La descriptiva: describe una secuencia de tipos de razonamiento llamados los niveles de razonamiento, a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo.
- Fases de aprendizaje: son directrices para los maestros, sobre cómo ayudar a los estudiantes a lograr con facilidad llegar al nivel superior de razonamiento (Jaime & Gutiérrez, 1990, p. 305)

2.3.1. Fase descriptiva: Niveles de Van Hiele sobre el desarrollo del pensamiento geométrico

Originalmente, el modelo de Van Hiele, determinó cinco niveles empezando con el básico, y posteriormente el primero, segundo, tercero y cuarto. Sin embargo, Van Hiele y otros autores han ido evolucionando la numeración de éstos. A continuación se presenta la numeración planteada por Jaime & Gutiérrez (1990, p.p. 306-311).

Nivel I de reconocimiento

Van Hiele sugiere como primera medida que el estudiante reconozca la figura a partir de la visualización. Una forma de visualizar la elipse es a través de la construcción de un jardín elíptico simulando su trazo en Geogebra. Otra forma de visualizar las cónicas y en particular de la elipse es mediante el corte de un cono con un plano (cónicas de Apolonio).

En este nivel los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras, los reconocimientos, las diferenciaciones y clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas o globales entre ellas, como color, tamaño, forma.

Las descripciones de ciertas figuras están basadas en la comparación con otros objetos, que necesariamente no son geométricos, por ejemplo en el caso de la elipse, se parece al contorno de un huevo, de algunos estadios de fútbol, etc.

Nivel II de análisis

En este nivel los estudiantes se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos, y que están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades siempre de manera informal. Para este caso a partir de la figura trazada de una elipse, se procede a explorar y estudiar sus partes como: centro, focos, ejes focal y normal, cuerda, radiovectores, etc.

Otro punto de este nivel es que el estudiante reconozca las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, y deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación. Para el caso de la elipse, se puede estudiar la propiedad de simetría por medio del doblado del papel, y a partir de ésta deducir otras propiedades. También a partir de la elipse trazada en Geogebra por medio del método del jardinero, se puede estudiar la propiedad bifocal necesaria para construir la definición de la elipse como lugar geométrico, de una manera no formal.

Nivel III de Clasificación

En este nivel se describen las figuras de manera formal y se realizan clasificaciones lógicas ya que el nivel de razonamiento matemático en el estudiante ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. Para el caso de la elipse el estudiante puede establecer relaciones entre registros de representación numérica con el geométrico, como por ejemplo: al relacionar el valor numérico de la excentricidad en la elipse con su gráfica, permite diferenciar entre una elipse y otra por su grado de redondez, así mismo llegar a clasificar la circunferencia como un caso particular de la elipse donde su excentricidad es cero. Otro ejemplo en la clasificación de una elipse, es relacionar el modelo algebraico de la ecuación canónica de una elipse con su gráfica, ya sea una elipse horizontal (eje focal paralelo a la abscisa) o vertical (eje focal paralelo a la ordenada).

Otro punto de este nivel, es que el estudiante puede seguir demostraciones de manera guiada. Para el caso de las actividades de la elipse, se pretende que el estudiante siga la demostración de la ecuación canónica de la elipse por medio de problemas dosificados, y posteriormente relacionen los registros de representación algebraico y geométrico.

El cuarto nivel y quinto nivel (deducción formal y rigor) eran considerados por Van Hiele como aquellos más difícil de discernir que los niveles anteriores (Jaime & Gutiérrez, 1990), por dicha no se tendrán a consideración en el presente trabajo, ya que el estudiante requiere de una madurez en conocimientos de Geometría que no son adquiridos en preparatoria, por lo tanto las actividades serán solo enmarcadas en los tres primeros niveles del pensamiento geométrico de Van Hiele.

2.4. Aspectos teóricos

2.4.1. Resumen de las cónicas a lo largo de la historia

El descubrimiento de las secciones cónicas se le atribuye a un gran geómetra de la antigua Grecia llamado Menecmo (350 a. d. C.), las cuales surgieron debido a cuando intentaba resolver uno de los tres grandes problemas clásicos de la geometría griega, que fue el de la duplicación del cubo (Heath, 2006). Menecmo detectó que para la resolución del problema había una familia de curvas adecuadas, los tres tipos de cónicas obtenidos por el mismo método, a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso el cual no aparece dentro en el bachillerato, al respecto Boyer (1956) comenta que durante un siglo y medio aproximadamente estas curvas se conocieron como "*La Triada de Menecmo*" y que ya se le conocían como secciones de un cono agudo (u oxitoma), secciones de un cono rectángulo (u ortoma) y secciones de un cono obtuso (o amblitoma), y además en ese tiempo se le consideraban a dichas secciones perpendiculares a la generatriz.

Las secciones cónicas se convirtieron en curvas muy atractivas para los geómetras de la antigua Grecia ya que se presentaban como parte de la solución del planteamiento de Menecmo al problema de la duplicación del cubo, aun así fueron estudiadas luego por Euclides y Arquímedes que construyó la elipse por medio de un aparato mecánico llamado la “*trammel of Archimedes*” (tramoya de Arquímedes) la cual traza el recorrido de un punto fijo sobre la hipotenusa de un triángulo al variar éste la longitud de sus catetos (Apostol & Mnatsakanian, 2009), en otras palabras es el lugar geométrico marcado por un punto sobre una escalera que está resbalando sobre el piso y apoyada en una pared.

Aproximadamente en entre el 262 a. de C. y 191 a. de C. el geómetra Apolonio de Perga realizó los cortes de un cono de madera, y atribuyó a uno de sus ocho libros rescatados en gran parte por Pappus, las secciones cónicas, con el nombre de parábola elipse e hipérbola (Boyer, 1956, p.p. 22). A diferencia de Menecmo, Apolonio consideró el corte a dos conos unidos por un mismo vértice con bases paralelas (Figura 4)

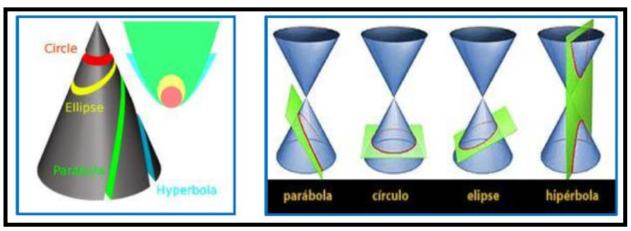


Figura 4. Curvas cónicas según Menecmo y Apolonio respectivamente.

Siglos más adelante se debatía sobre la posición de la Tierra siendo pionero el modelo de geocentrismo de Ptolomeo. En el siglo XVI Tycho Brahe (1546-1601) confeccionó en una tabla sus observaciones astronómicas, las cuales fueron estudiadas por Kepler (1571-1630), dichos datos fueron como un tesoro porque descubrió en ellos las leyes sobre el movimiento planetario (Feynman, 1971, p. 7-2), leyes que requieren el estudio de las cónicas, y fueron enunciadas así:

- Cada planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol, siendo el Sol uno de sus focos.
- La línea del Sol a cualquier planeta barre áreas iguales de espacio en intervalos de tiempos iguales.
- Los cuadrados de los tiempos de revolución (períodos) de los planetas, son proporcionales a los cubos de sus distancias promedios al Sol (Hewitt, 2004, p. 192).

Según Imaz & Moreno (2010, p. 15), "*Isaac Newton (1642-1727) fue más allá en el estudio del movimiento, pues hizo posible una síntesis de las leyes encontradas por Galileo y las leyes que regían el movimiento de los planetas".* La anterior afirmación de cómo Newton posiblemente interpretó la trayectoria elíptica planetaria se puede apreciar en la explicación de la conferencia perdida de Feynman (Goodstein, Goodstein, 1999).

Por último, en el siglo XVII Fermat (1601-1665) y Descartes (1556-1650) con el concurso del arte analítica de Vieta, dispone del instrumento algorítmico del Álgebra simbólica que aplica a problemas geométricos, pero no llega a utilizar coordenadas. En un estudio intermedio esencial en el camino que arranca del álgebra geométrica de los griegos, confluye finalmente en la geometría analítica de Descartes, la cual hace transitar la elipse al Álgebra con un sistema de coordenadas, describiendo la condición de los puntos de una cónica por medio de una ecuación con dos incógnitas de segundo grado. Al respecto González (2007) menciona que en la Geometría griega, las coordenadas, variables y ecuaciones, no eran elementos sino conceptos subsidiarios derivados de situaciones geométricas concretas, de curvas que determinan las ecuaciones sin que se dé la situación inversa, es decir que las ecuaciones determinen las curvas ya que estas siempre se producían mediante una construcción estereométricas como secciones de un sólido, tal es el caso de las cónicas de Apolonio.

2.4.2. La elipse

2.4.2.1. La elipse como cónica

La elipse surge de la intersección de una superficie cónica con un plano, de tal manera que la inclinación del plano no supere la inclinación de la recta generatriz del cono, consiguiendo así que la intersección sea una curva cerrada bidimensional, como se muestra en la Figura 5.

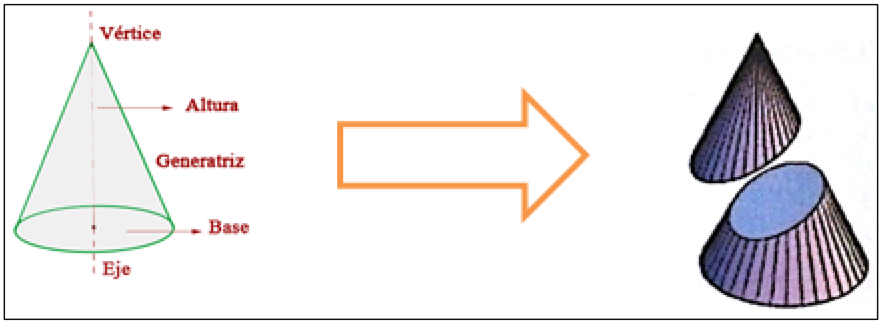


Figura 5. Formación de una elipse al corte de un plano en un cono recto.

El realizar el corte a un cono es una actividad que puede servir para dar una primera idea, sobre la relación de la elipse como curva cónica, sin embargo en el presente trabajo no se acude a la formalidad que conlleva definir la elipse a través del corte a un cono.

2.4.2.2. La elipse como lugar geométrico

Se puede definir la elipse como lugar geométrico de muchas formas, la primera es referente a la propiedad bifocal, que según Lehmann (1989, p. 173): "*una elipse es un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante mayor a la distancia entre los dos puntos*". En la Figura 6 se muestra los puntos fijos F y F' llamados focos, y P un punto cualquiera sobre el contorno de la elipse. La suma de las distancias (segmentos o radiovectores) $\overline{FP}+\overline{F'P}$ resulta ser siempre una constante igual a la magnitud del eje mayor 2a.

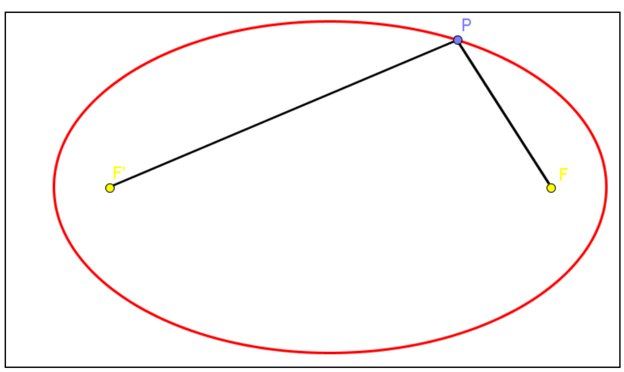


Figura 6. Radiovectores FP y F'P de la elipse.

$$\overline{FP}+\overline{F'P}=\text{constante} \quad (1)$$

La anterior definición descrita en la ecuación (1) se puede demostrar por medio de la construcción geométrica de la elipse por medio del círculo director, que a su vez sirve para definir la elipse como lugar geométrico de un modo más alusivo a una geometría dinámica. A continuación se detallan los pasos de construcción de la elipse por medio del círculo director en Geogebra:

1. Se traza una circunferencia de radio constante con centro en F.
2. Luego se ubica un punto F' en el interior de dicha circunferencia (o en el círculo director de centro F), a una distancia $\overline{FF'}$ respecto del punto F como lo muestra la Figura 7.

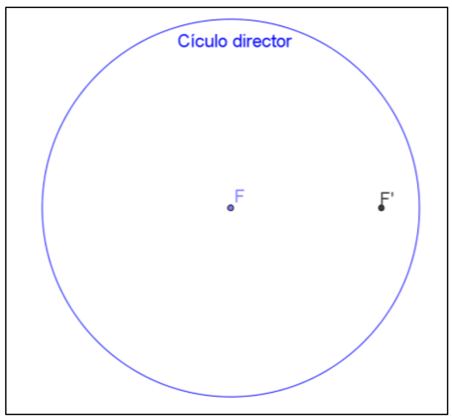


Figura 7. Construcción del círculo director para trazo de la elipse en Geogebra

3. Se ubica un punto E sobre la circunferencia de centro F. Luego se traza un segmento $\overline{FE}$ (radio) y la mediatriz entre el punto E y F' (con la herramienta de mediatriz). Posteriormente se ubica el punto de intersección P de la mediatriz y el radio $\overline{FE}$ (con la herramienta punto de intersección). Por último se traza el lugar geométrico (con la herramienta lugar geométrico de Geogebra) del punto P al mover el punto E sobre la circunferencia. Dicho lugar geométrico es la elipse, como lo muestra la Figura 8.

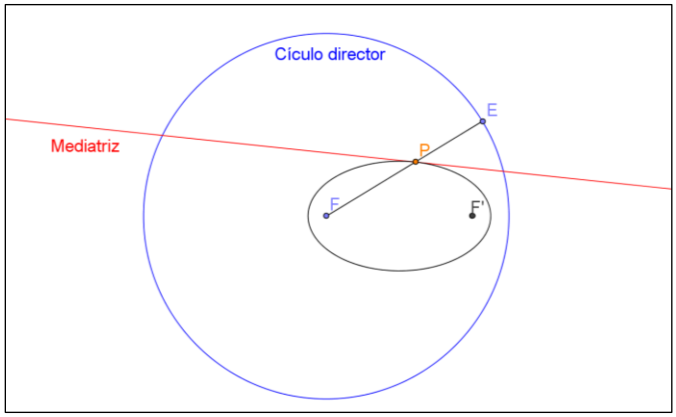


Figura 8. Elipse obtenida al trazar el lugar geométrico de P, respecto de E, por medio del círculo director

A continuación se demostrará la definición bifocal de la elipse de la ecuación (1), a partir de la construcción mostrada en la Figura 8:

- $\left|\overline{FP}\right| + \left|\overline{PE}\right| = \left|\overline{FE}\right|$=Radio del círculo director=Constante (a)
- P es un punto sobre la mediatriz de E y F', entonces:

$$\left|\overline{PE}\right| = \left|\overline{PF'}\right| \quad \text{(b) (propiedad de la mediatriz)}$$

- Sustituyendo (b) en (a), se tiene que:

$$\left|\overline{FP}\right| + \left|\overline{PF'}\right| = \text{Constante} \quad \text{(c)}$$

  Lo que demuestra la definición de la elipse como lugar geométrico, cuyo resultado se expresa en la ecuación (1).

Teniendo en cuenta qué es cada objeto geométrico de acuerdo a la construcción realizada del círculo director, se puede definir la elipse como el lugar geométrico del punto P, al mover el punto E sobre la circunferencia de centro F. Sin embargo es una definición más alusiva a una geometría dinámica.

Para la primera y tercera actividad del presente trabajo, se utilizó la construcción de la elipse por el círculo director, como base para el escenario del método del jardinero. Para ello se utilizó desde un comienzo dos deslizadores llamados longitud de la cuerda y distancia focal que permiten controlar las magnitudes del radio del círculo director, cuya longitudes son equivalentes a la longitud de la cuerda o eje mayor de la elipse, y la distancia $\overline{FF'}$ entre los focos respectivamente. Una vez obtenido el trazo de la elipse como lugar geométrico en dicha construcción, se ubicó un nuevo punto P' la misma elipse, y se añadió el trazo de los dos segmentos $\overline{FP'}$ y $\overline{F'P'}$ que representan los pedazos de cuerda en el método del jardinero. Por último se "ocultó" el círculo director, la mediatriz, el punto P, y se añadieron gráficas de fondo para embellecer el escenario didáctico. En la Figura 10**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se observa una toma del trazo simulado de la elipse por medio del método del jardinero. La suma de los "pedazos de cuerda" $\overline{F'P}$ y $\overline{F'P'}$ dan como resultado la longitud de la cuerda o radio del círculo director (en el ejemplo de la Figura 9**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** son 10 unidades de longitud del eje mayor y 4 unidades de semi-distancia focal). El estudiante simula el trazo de la elipse en Geogebra al mover el punto P'.

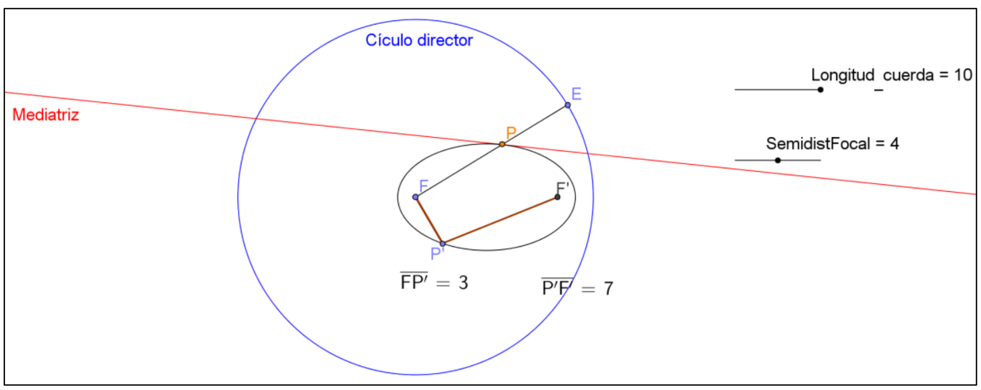


Figura 9. Trazo de la elipse simulado en Geogebra, por medio del método del jardinero construido a partir del círculo director.

Otra manera de definir la elipse como lugar geométrico es por medio de la construcción de foco-directriz: una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, para los cuales se cumple que el cociente entre sus distancias a un punto fijo que se denomina foco, y a una recta dada llamada directriz, permanece constante y es igual a la excentricidad "e" de la misma (ver Figura 10)

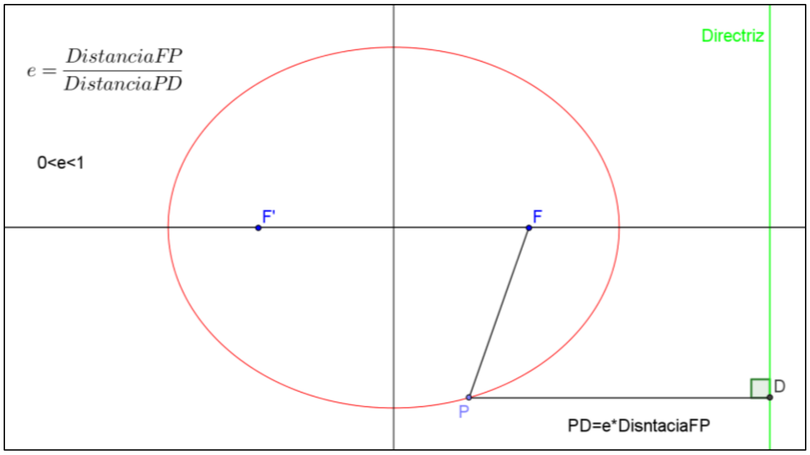


Figura 10. Lugar geométrico de la elipse a partir de la construcción foco-directriz

2.4.2.3. Elementos de la elipse

A continuación se analizará la Figura 11, para definir los principales elementos de la elipse:

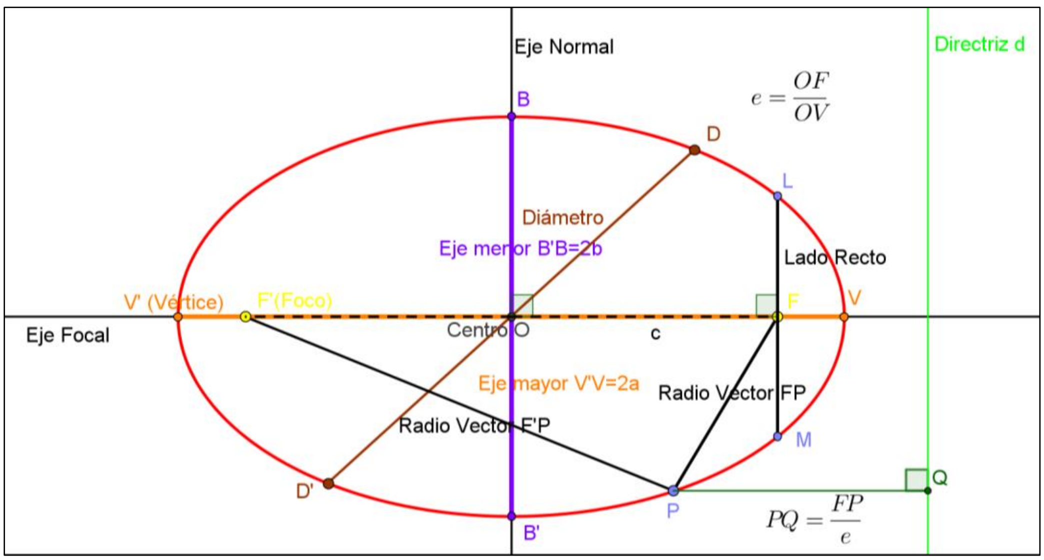


Figura 11. Elementos de la elipse.

- Los focos: Son los puntos fijos F y F' en el interior de la elipse. El centro es el punto medio de la elipse, o punto medio de los focos.
- Eje focal: Es la recta que pasa por los focos y el centro de la elipse. El eje focal intercepta la elipse en los vértices V y V'.

- Eje normal: es la recta perpendicular al eje focal, que pasa por el centro de la elipse. El eje menor intercepta la elipse en los puntos B y B'.
- Diámetro: Es el segmento formado por dos puntos que están sobre la elipse D y D', y que pasa por el centro.
- Eje mayor: Es el segmento VV' o diámetro de mayor longitud. Tiene una longitud de 2a, siendo a una constante.
- Eje menor: Es el segmento BB' o diámetro de menor longitud. Tiene una longitud de 2b, siendo b una constante.
- Semieje mayor: Es el segmento entre el centro de la elipse y alguno de los vértices de ésta. Tiene una longitud de a unidades.
- Semieje menor: Es el segmento entre el centro O de la elipse y alguno de los puntos B o B'. Tiene una longitud de b unidades.
- Distancia focal: Es la distancia 2c, entre los focos.
- Radiovectores: Son los segmentos $\overline{F'P}$ y $\overline{FP}$, que unen a un foco con un punto P sobre la elipse.
- Lado recto: Es el segmento formado entre dos puntos de la elipse, perpendicular a uno de los focos.
- La directriz: Cada foco F y F' está asociado a una directriz, que es la recta perpendicular al eje focal. La distancia de cualquier punto P de la elipse hasta el foco F (o F') es una fracción constante de la distancia perpendicular de ese punto P a la directriz que resulta en la igualdad:

$$\begin{gathered} \overline{PF} = e \cdot \overline{PQ} \\ \therefore e = \frac{\text{Distancia focal}}{\text{Longitud del semieje mayor}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OV}} = \frac{c}{a} \end{gathered} \tag{2}$$

La relación entre estas dos distancias es la excentricidad "e" (que explicaremos más adelante) de la elipse. Esta propiedad que puede ser probada con la herramienta esferas de Dandelin para definir la elipse de forma alternativa, que no será tratada en el presente trabajo de investigación.

2.4.2.4. Algunas propiedades de la elipse

1. La elipse es simétrica respecto al centro, por lo tanto de la figura 11 se puede concluir que:

$$\overline{OV} = \overline{OV'}, \quad \overline{OF} = \overline{OF'}, \quad \overline{FV} = \overline{F'V'} \qquad (3)$$

2. La suma de los radiovectores de un punto cualquiera de la elipse es siempre igual a una constante 2a. Esto se puede apreciar si se sitúa un punto de la elipse en alguno de los vértices ya sea V, el radiovector $\overline{F'V} + \overline{FV} = \text{constante } pero \ \overline{F'V'} = \overline{FV}$ por simetría (propiedad 1) entonces: $\overline{F'V} + \overline{F'V'} = 2a$ (4)

3. Los radiovectores de los extremos del semieje menor (B o B') son iguales a la longitud del semieje mayor=a unidades.

4. El semieje mayor es la hipotenusa $\overline{FB} = a$ de un triángulo rectángulo cuyos catetos son: el semieje menor $\overline{OF} = b$ y la distancia focal $\overline{OB} = b$. Por lo tanto cumplen con la relación pitagórica indicada en la Figura 12:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (5)$$

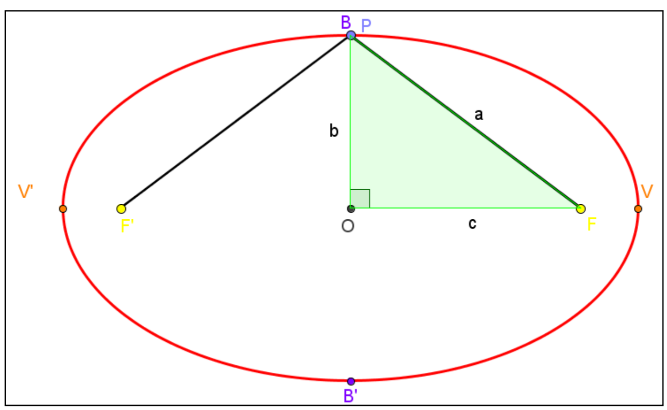


Figura 12. Relación Pitagórica de los parámetros a, b y c de la elipse

La tangente a la elipse en un punto de la curva es bisectriz del ángulo formado en dicho punto por un radio vector y la prolongación del otro (Figura 13) (De Oteyza et all, 2001, p. 492):

$$\alpha \cong \beta$$

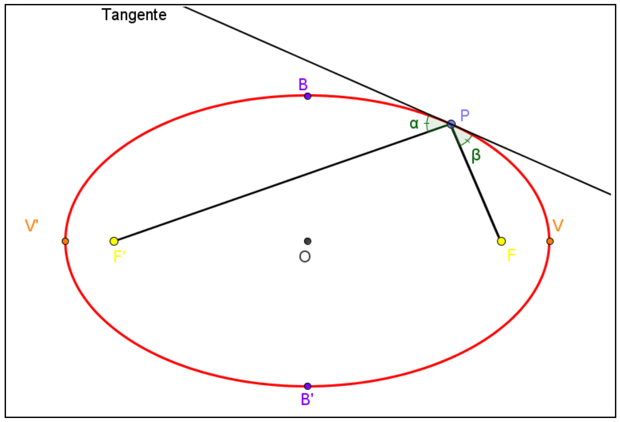


Figura 13. Congruencia de ángulos de la tangente de la elipse con los radiovectores

De acuerdo con la quinta propiedad, todo rayo (radiovector) que sale de un foco, llega al otro foco, esta es una propiedad reflexiva de la elipse.

Un caso real donde se aprecia esta propiedad, es en un *domo* en forma de elipsoide, del cual se emite un sonido o un rayo de luz en uno de los focos (de una de las elipses formadas a un corte del domo) de modo que al chocar con la superficie de ésta, se reflejará llegando exactamente al otro foco (De Oteyza et all, 2001, p.p. 492,495). Una construcción de este tipo es la galería de los susurros o capilla de los secretos en el desierto de los Leones en el Distrito Federal de México (UCNCIMix, 2009).

La Figura 14 muestra una toma de la simulación realizada en GeoGebra sobre el fenómeno acústico que se experimenta en el desierto de los Leones. En la simulación Freddy emite un sonido en uno de los focos de la elipse, de modo que las ondas de sonido chocan con la superficie con un ángulo de incidencia α, que posteriormente se reflejarán con un ángulo reflejado β de igual magnitud, concentrándose en el otro foco donde está Monique.

En realidad esta propiedad geométrica se explica en la Física como un fenómeno de reflexión de la ondas (Rossing, Moore & Wheeler, 2001, p.p.525-526).

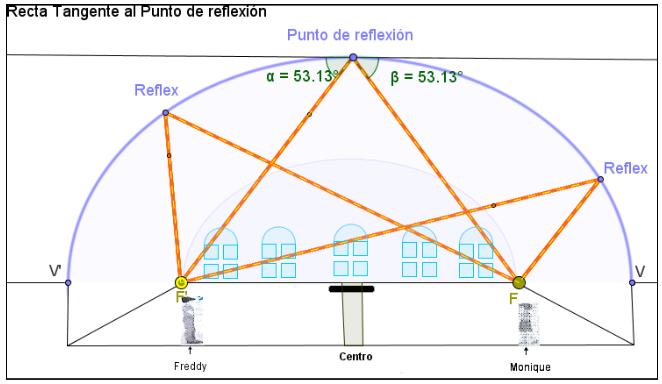


Figura 14. Reflexión de las ondas sonoras de un foco F' de la elipse al otro F. Fenómeno Físico apreciado en el Desierto de los Leones México (Gráfica tomada de una simulación en Geogebra)

2.4.2.5. Excentricidad de la elipse

Dadas dos elipses, ¿qué permitiría diferenciarlas? Precisamente el valor de la excentricidad es lo que nos permitirá diferenciar entre una y otra, ya que dicho parámetro determina el grado de redondez de la elipse. Si los ejes de una elipse son iguales, los focos y el centro se ubican en una misma coordenada, es decir como si estuvieran uno encima del otro superpuestos, y la distancia focal sería cero. Este caso especial de la elipse produce una circunferencia, pero a media que se alejan los focos se observa que la curva se alarga, o se vuelve más ovalada (Figura 15).

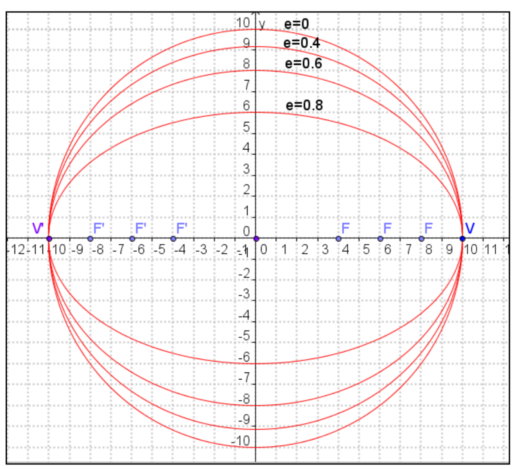


Figura 15. Excentricidad de la elipse para diferentes distancias focales

Una elipse se puede definir como una circunferencia aplastada, en este caso la excentricidad es el grado de aplastamiento de la elipse (Cuevas, 2013, p. 163). Cuando la distancia focal de la elipse tiende a cero ($c \to 0$), la curva representa una circunferencia. Cuanto más se alejen los focos o crezca la distancia focal, mayor será la excentricidad y por ende el aplastamiento de la elipse.

El parámetro de la excentricidad está entre cero y uno, y se relaciona con el grado de redondez o aplastamiento. Según Lehmann (1989, p. 176), la excentricidad se define matemáticamente como la razón de la distancia focal c, con la longitud del semieje mayor a.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \therefore c<a \qquad (6)$$

Entonces:

$$0 < e = \frac{c}{a} < 1 \qquad (7)$$

Como c<a la excentricidad se encuentra entre 0 y 1.

Otra forma de medir la excentricidad es con la razón de la distancia de cualquier punto P sobre la elipse hasta el foco F (o F'), respecto de la distancia perpendicular del punto P a la directriz (Figura 10)

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} \qquad (8)$$

Para $c = 0$ la excentricidad es $e = 0$ y en este caso particular la elipse representa un círculo, para una excentricidad cercana a la unidad la elipse es muy alargada u ovalada. Una de las aplicaciones más importantes de la elipse es la trayectoria los planetas alrededor del Sol, que se puede considerar elíptica:

> *"Johannes Kepler cuando estudiaba el movimiento de Marte, al aplicar el modelo de Copérnico de órbitas circulares alrededor del Sol, observó que los cálculos discrepaban ligeramente de la posición real del planeta en el firmamento. Así que*

intentó ajustar la órbita a otras curvas y finalmente, encontró que la elipse se ajustaba maravillosamente a ella" (Oteyza et all, 2001, p. 492)

Muchos estudiantes perciben las cónicas conectadas con la realidad, como por ejemplo, que las órbitas planetarias son elipses, sin embargo añade que se trata de un conocimiento social (Del Río, 1991, p.121), por eso es común que muchas personas al observar la trayectoria elíptica de la Tierra pueda dudar de su forma, ya que realmente es una elipse poco excéntrica como se observa en la Figura 16 (las órbitas de la Tierra y Marte), es decir es tan redonda a tal grado que parece ser una circunferencia, de ahí que también Copérnico diseñara un modelo de órbitas circulares y no elípticas, Kepler notó esa pequeña diferencia gracias a las observaciones de Tycho Brahe.

Realmente la órbita de un planeta alrededor del Sol, no es una elipse perfecta, pero si una muy buena aproximación.

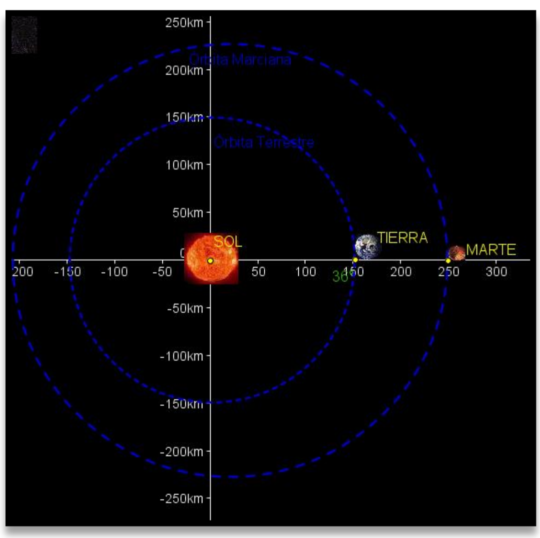


Figura 16. Órbitas elípticas de la Tierra y Marte. Construcción realizada en GeoGebra (ver en http://www.geogebratube.org/material/show/id/40676)

En la Tabla 1, se muestran los diferentes valores de excentricidad para diversos planetas. Se observa que el valor de la excentricidad de la Tierra es 0.017 y es menor a la excentricidad de Marte con 0.093, por esa razón se aprecia en la Figura 15 que la órbita terrestre es más redonda que la Marciana. Sin embargo las órbitas de los planetas son casi circulares porque sus valores de excentricidad tienden a cero.

Planeta	Excentricidad	Distancia media (U. A.)
Mercurio	0.206	0.387
Venus	0.007	0.723
Tierra	0.017	1
Marte	0.093	1.52
Júpiter	0.048	5.2
Saturno	0.056	9.54
Urano	0.047	19.18
Neptuno	0.009	30.06

Tabla 1. Excentricidad en diferentes planetas. (De Oteyza et all, 2001, p. 493)

Una de las leyes de Kepler enuncia que: *Cada planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol, siendo el Sol uno de sus focos* (Hewitt, 2004, p. 192). En determinado momento el planeta Tierra se encuentra más lejano al Sol aproximadamente a 152 millones de kilómetros, a esta distancia se le denomina *afelio*, y en otro momento se encuentra más cercana al Sol aproximadamente a 147 millones de kilómetros, distancia a la cual se le denomina *perihelio*. La distancia media de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica. Esta aplicación de la elipse en la Astronomía es muy común en textos como el de Sullivan (1997), De Oteyza et all (2001), Cuevas (2013), entre otros. Cuevas (2013) plantea que las leyes de Kepler y órbita de un planeta alrededor del Sol es una situación inicial (p. 152), como introducción en el estudio de la elipse particularmente. Se reconoce que los temas de Astronomía son motivantes y de mayor interés para los estudiantes, por lo que sirve como problema en contexto para las actividades.

2.4.2.6. Ecuaciones de la elipse

Ecuación canónica de la elipse con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes coordenados

La Figura 17 muestra la elipse horizontal con centro en el origen y ejes paralelos a los cartesianos.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (9)$$

a: Longitud del semieje mayor.

b: Longitud del semieje menor.

Del triángulo rectángulo que se forma con el centro, foco y vértice se deduce que la distancia focal c es: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

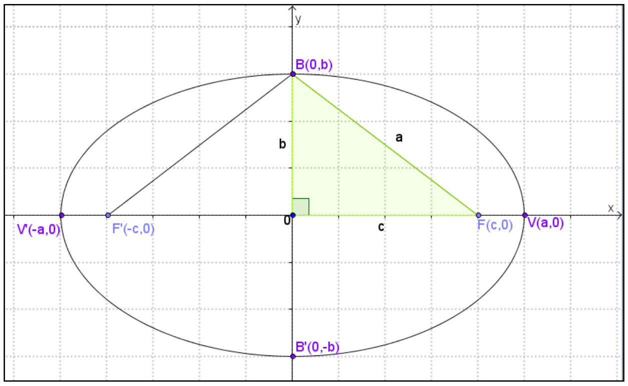


Figura 17. Elipse horizontal con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos

En la Figura 18 se observa una elipse vertical. En este caso la distancia focal c, y el eje mayor a se encuntran sobre el eje "y".

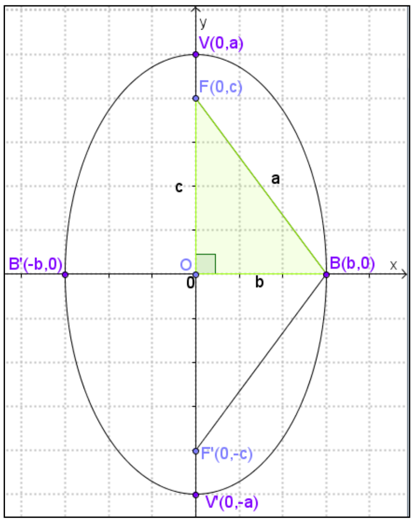


Figura 18. Elipse vertical con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos

La ecuación canónica para dicha elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (10)$$

De donde:

a: Longitud del semieje mayor.
b: Longitud del semieje menor.

$c=\sqrt{a^2-b^2}$: Distancia focal

Se diferencia entre las figuras 17 y 18 respectivamente una elipse horizontal y vertical. En común los focos están siempre sobre el eje mayor, el eje mayor siempre está sobre el eje focal, y se cumple que:

Eje mayor = 2a > eje menor 2b, por lo que siempre a>b

Esto sirve para diferenciar entre una elipse horizontal y una vertical cuando se da la ecuación, ya que si se observa las ecuaciones respectivamente se notará que:

$$\frac{x^2}{\underline{a}^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{\underline{a}^2}=1$$

- Si a^2 siempre se encuentra como denominador de x, la elipse es horizontal.
- Si a^2 siempre se encuentra como denominador de y, la elipse es vertical.

En el anexo III se puede apreciar todo el análisis algebraico de la demostración de la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen, y ejes paralelos a los cartesianos.

La Tabla 2, muestra las coordenadas de los focos y vértices para una elipse horizontal y vertical con centro en el origen:

Elipse horizontal	Elipse Vertical
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ Focos: $$F'(-c,0)$$ $$F(c,0)$$ Vértices: $$V'(-a,0)$$ $$V(a,0)$$	$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$ Focos $$F'(0,-c)$$ $$F(0,c)$$ Vértices $$V'(0,-a)$$ $$V(0,a)$$

Tabla 2. Coordenadas para los focos y vértices en una elipse horizontal y vertical con centro en el origen

Ecuaciones de la elipse horizontal y vertical con centro fuera del origen

A continuación, se presenta la ecuación canónica de la elipse con centro fuera del origen, teniendo en cuenta la ecuación canónica con centro en el origen y la traslación de ejes. Solo se considerará la elipse con eje focal paralelo a la abscisa o eje xy en otro caso el eje focal paralelo a la ordenada o eje y.

Para facilitar la deducción de las ecuaciones primero se deducirá la traslación de los ejes.

Se debe imaginar que una persona se encuentra en el origen del sistema de coordenadas cartesianas xy. Luego se traslada al punto $P(2,3)$ y en este mismo, se traza un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$, cuyo origen ahora será P.

Si en el nuevo sistema de coordenadas $x'y'$', se localiza un punto $Q(4,5)$. ¿Cuáles serán las coordenadas del punto Q respecto al sistema de coordenadas xy? (ver Figura 19)

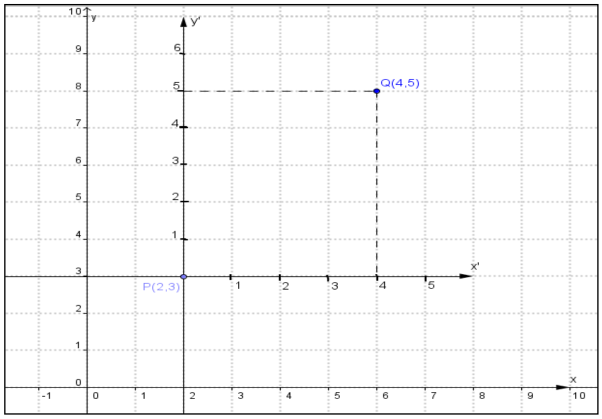


Figura 19. Traslación del sistema xy de un punto (4,5)

Para encontrar la nueva abscisa, hay que sumar $x = 2 + 4 = 6$.

Para encontrar la nueva ordenada, hay que sumar $y = 3 + 5 = 8$.

Por lo tanto, las coordenadas del punto Q en el sistema xy son $(8,7)$.

Si se generaliza el anterior ejercicio, suponiendo que ahora se parte del sistema de coordenadas xy el observador se traslada a un punto $P(h,k)$, sobre éste se traza un nuevo sistema coordenado $x'y'$ paralelo al sistema xy. Luego se localiza un punto $Q'(x',y')$ sobre el nuevo sistema coordenado $x'y'$ como se indica en la Figura 20.

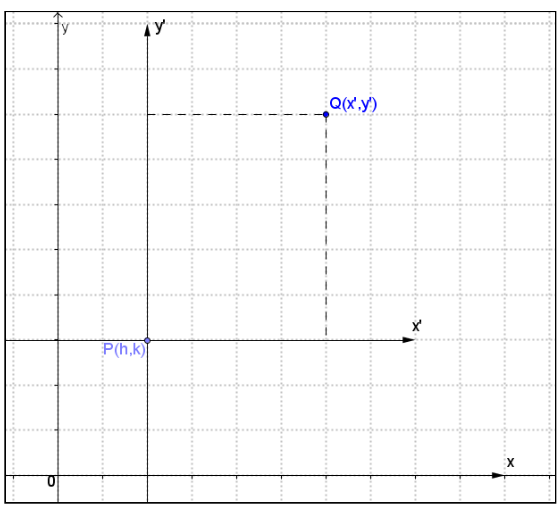


Figura 20. Relación de traslación del sistema xy, con el sistema x'y'

Para encontrar la abscisa y ordenada del punto Q respecto del sistema xy, se hace la suma:

$$x = h + x' \text{ o bien } x' = x - h \quad (11a)$$
$$y = k + y' \text{ o bien } y' = y - k \quad (11b)$$
(11a y 11b respectivamente)

Por lo tanto si se tiene una elipse horizontal en un nuevo sistema de coordenadas con centro $C(h,k)$ como el que se observa en la Figura 21, su ecuación canónica será:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (11a y 11b) de traslación en la ecuación (12), ésta se convierte en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (13)$$

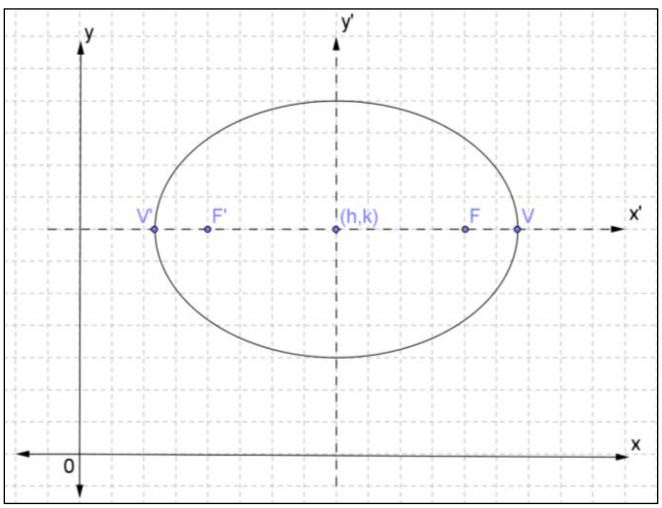


Figura 21. Elipse horizontal con centro c (h, k)

Si la elipse es vertical con centro $C(h,k)$ como en la Figura 22, su ecuación canónica en un sistema de coordenadas $x'y'$ es:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \quad (14)$$

Al sustituir las ecuaciones (11a y 11b) en la ecuación (14), ésta se convierte en:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \qquad (15)$$

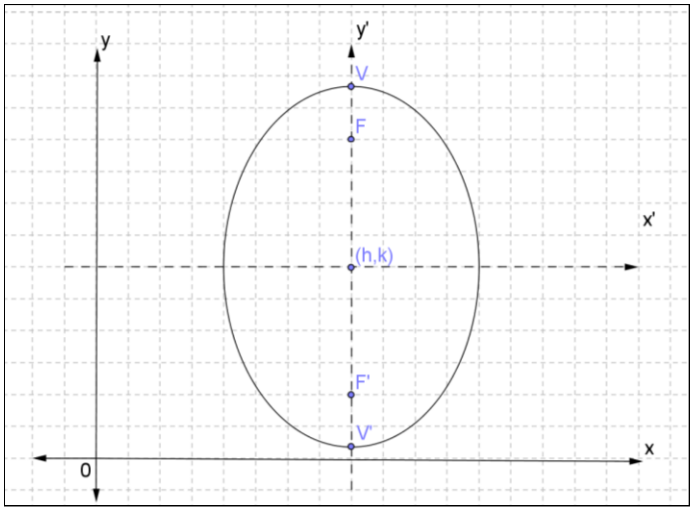


Figura 22. Elipse vertical con centro C (h,k)

Las coordenadas de los focos y los vértices para una elipse horizontal y vertical con centro fuera del origen y ejes paralelos a los ejes coordenados, respectivamente son:

Elipse horizontal	Elipse Vertical
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Centro $C(h,k)$ Focos: $F'(h-c,k)$ $F(h+c,k)$ Vértices:	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ Centro $C(h,k)$ Focos $F'(h,k-c)$ $F(h,k+c)$ Vértices

$V'(h-a,k)$ $V(h+a,k)$	$V'(h,k-a)$ $V(h,k+a)$

Tabla 3. Coordenadas de los focos y vértices en una elipse horizontal y vertical con centro fuera del origen, y ejes paralelos a los ejes cartesianos

Ecuación general de la elipse

A partir ecuación (13) se puede llegar a la siguiente ecuación general de la elipse, por medio de procesos algebraicos que se detallan en el anexo IV:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (16) \quad \text{Ecuación general de la elipse}$$

De donde A, B, C, D, E y F son coeficientes y $A \neq C$ y tienen el mismo signo.

Cuando la elipse tiene su centro en el origen entonces: $D = E = 0$

Si los ejes de la elipse no son paralelos a los ejes cartesianos, entonces la ecuación general presenta un término "cruzado" Bxy, donde $B \neq 0$, como la siguiente:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (17)$$

Esta última ecuación no se considera tratar en las actividades, porque no hace parte del currículo de la SEP.

2.4.3. Construcciones de la elipse

Existen muchas formas de construir la elipse, las cuales se puede apreciar algunas en Contreras, Contreras & García (2002) y en el libro de Geometría analítica dinámica de Cuevas, Mejía, Pluvinage & Gonzalo (2005). Anteriormente se detalló la construcción de la elipse por medio del círculo director. A continuación, se presentarán dos construcciones más: el método del jardinero y por anomalía excéntrica o círculo osculador.

El método del jardinero

Este método un tanto mecánico descrito en algunos artículos o textos (Contreras, Contreras & García, 2002; Hewitt, 2004; Cuevas et all, 2005), que se utiliza para poder trazar el contorno de una elipse. El método consiste en clavar dos estacas situadas en dos puntos fijos F y F' (los focos) y fijar de ellas una cuerda de longitud 2a (de mayor longitud que la separación entre las estacas), como se indicó en la Figura 3. Luego se tensa la cuerda con una tercera estaca, de modo que al deslizarla suavemente se obtiene el trazo de una elipse.

Construcción de la elipse por anomalía excéntrica o círculo osculador

Teniendo como datos los semiejes *a* y *b* de una elipse, se procede a la siguiente construcción tomada de Contreras, Contreras & García (2002, p. 122):

- Se trazan dos círculos de radios arbitrarios $\overline{AC} = a$ y $\overline{AK} = b$ siendo $a > b$, como lo indica la Figura 23.
- El ángulo que forma $\overline{AC}$ con $\overline{AK}$ le denominamos α el cual determina la "anomalía excéntrica".
- Por C se traza una recta paralela a $\overline{AK}$ y por D (intersección de $\overline{AC}$ con la circunferencia de radio b) se traza una recta perpendicular $\overline{AK}$. El punto E que es la intercepción entre las rectas paralela y perpendicular a $\overline{AK}$, representa el lugar geométrico de los puntos de la elipse, al mover el punto C sobre la circunferencia de radio a.

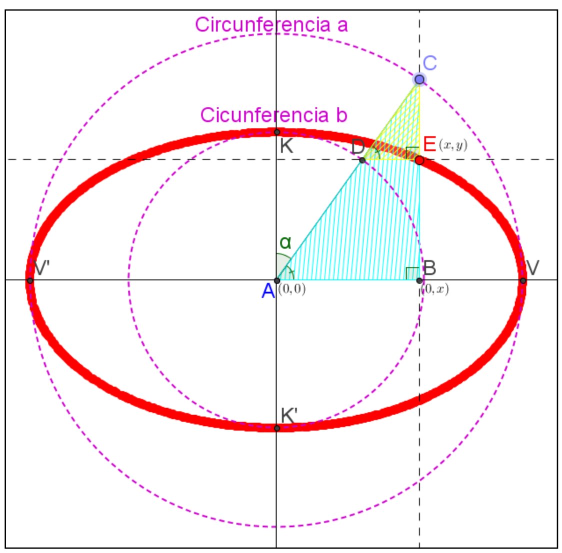


Figura 23. Construcción de la elipse por anomalía excéntrica o círculo osculador

En la Figura 23, se puede observar que El radio “a” de la circunferencia grande, y “b” de la circunferencia pequeña, definen la longitud de los semiejes mayor y menor de la elipse. La construcción descrita anteriormente es realizada en Geogebra de la cual se obtuvo el trazo simulado de la curva. A continuación se presentará una demostración sintético-analítica de la ecuación de la elipse a partir de la anterior construcción geométrica.

Argumentación analítico-sintética

Los triángulos ABC y DEC son rectángulos, y semejantes por el criterio de ángulo-ángulo

$$m\angle BAC = m\angle EDC \wedge m\angle CBA = m\angle CED = 90^\circ$$
$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

- Por lo tanto, se establecen proporciones entre sus catetos e hipotenusas respectivamente, así:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \quad (18)$$

- El punto A está en el origen por lo tanto tiene coordenadas $(0,0)$, y el punto E tiene coordenadas (x,y). Se asignan variables a los siguientes segmentos:

$$\overline{AC} = a \quad (19),\ \overline{DC} = b,\ \overline{AB} = x,\ \overline{BE} = y$$

Como se muestra en la Figura 24:

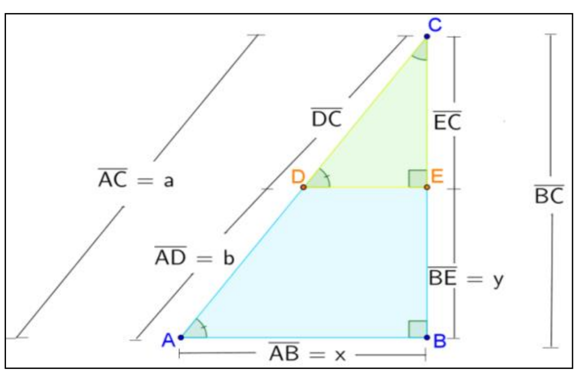


Figura 24. Asignación de variables en los triángulos ABC y DEC

- Por lo tanto, determinando algebraicamente los valores de los segmentos $\overline{DC}$, $\overline{BC}$, $\overline{EC}$, en términos de a, b, x, y:

$$\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = a - b \qquad (20)$$

$$\overline{BC} = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (21)$$

$$\overline{EC} = \overline{BC} - \overline{BE} = \sqrt{a^2 - x^2} - y \qquad (22)$$

- Partiendo de la proporción de la ecuación (18) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$, se parte de lo sintético para luego al sustituir los respectivos valores algebraicos (19), (20),(21) y (22) en la (18), así:

$$\frac{a}{a-b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2} - y}.$$

- Simplificando la ecuación se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (23)$$

La ecuación canónica de la elipse con centro en el origen.

A continuación se presenta otra argumentación *analítico-sintética* usando la anomalía excéntrica (Contreras, Contreras & García 2002, p. 123):

Si se llama a “x” la abscisa y “y” a la ordenada, del punto E de la Figura 23, se obtiene que:

$$\begin{matrix} x = a \cdot \sin(\alpha) \\ y = b \cdot \cos(\alpha) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \sin(\alpha) = \dfrac{x}{a} \\ \cos(\alpha) = \dfrac{y}{b} \end{matrix} \qquad (24) \text{ y } (25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (24) y (25) en la identidad Pitagórica: $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ *La ecuación canónica de la elipse con centro en el origen.*

La anterior construcción y demostración sintético-analítica de la elipse por anomalía excéntrica, fue propuesta por Contreras, Contreras, García (2002) quienes creen que a partir de ésta se puede llegar a la ecuación canónica de la elipse de manera más sencilla y simplificada, respecto a otras demostraciones algebraicas.

Capítulo III. Metodología y diseño de los instrumentos de medición

Las bases teóricas y conceptuales descritas anteriormente permiten sustentar la propuesta, que en éste capítulo se exhibe, bajo un marco didáctico lo que permite ~~la cual permita~~ alcanzar los objetivos del trabajo de investigación. En este capítulo se describe el diseño de los instrumentos de medición, recolección de datos en la etapa de aplicación y validación, y la población a la cual fue aplicado los instrumentos.

3.1. Diseño de los instrumentos

Los instrumentos de medición se estructuran así:

1. Test diagnóstico: Este instrumento tiene el propósito de determinar el nivel de competencia que tienen los estudiantes en los conceptos necesarios o de prerrequisitos para realizar las actividades.
2. Postest: Este instrumento tiene como propósito determinar los cambios sufridos por los estudiantes, los cuales fueron sujetos a la experimentación en el aula, Este instrumento se diseñó para verificar el grado de avance sobre los conceptos estudiados, tanto de prerrequisito como los propios de la elipse tras haber desarrollado las actividades propuestas.

A continuación se detallan cada uno de estos instrumentos.

3.1.1. Test diagnóstico

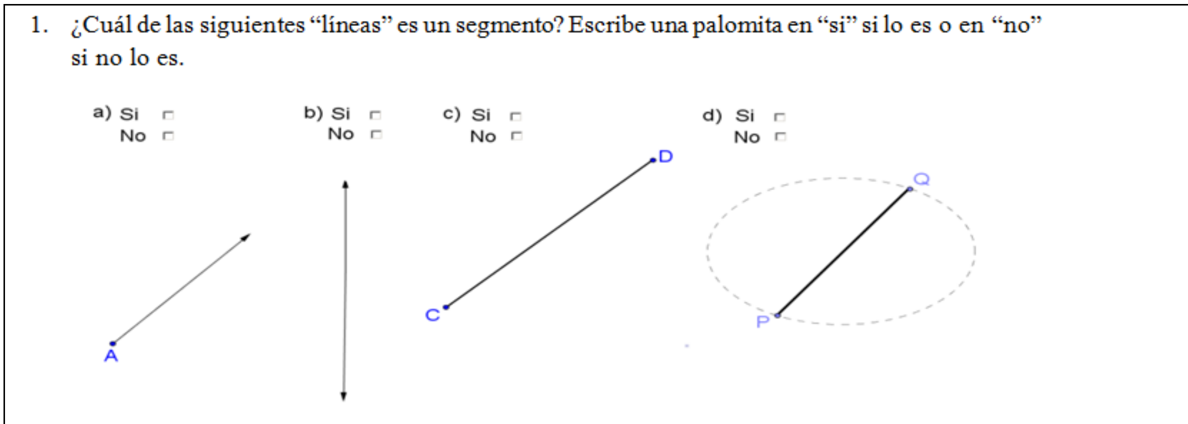
El objetivo de éste instrumento (Anexo V) es observar el nivel de conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para el posterior desarrollo de las actividades interactivas. La prueba diagnóstica consta de 6 reactivos con los subtemas que se detallan en la Tabla 4.

Bloque 1: Ítem 1 y 3	• Conceptos básicos de Geometría ➢ Identifica gráficamente un segmento ➢ Identificar que figuras planas representan un lugar geométrico
Bloque 2: Ítem 2 y 4	• Trigonometría

	➢ Semejanza de triángulos ➢ Teorema de Pitágoras
Bloque 3: Ítem 5	• Plano cartesiano Ubicación de puntos sobre el plano dadas sus coordenadas
Bloque 4: Ítem 6	• Algebra ➢ Completar el trinomio cuadrado perfecto

Tabla 4. Subtemas de la prueba diagnóstica

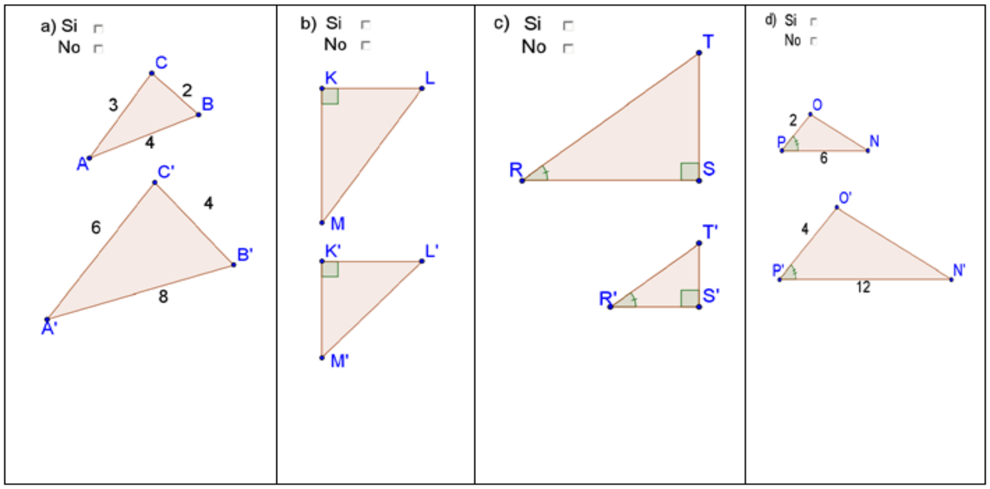
Ítem 1: En éste se pretende saber si el estudiante interpreta gráficamente un segmento, lo cual es necesario para identificar con facilidad algunos elementos de la elipse como: radiovector, ejes y semiejes mayor y menor.



Reactivo 1-Test diagnóstico

Ítem 2: En este se pretende identificar conocimientos previos en el estudiante sobre los criterios de semejanza de triángulos, y establecer relaciones entre sus lados en caso afirmativo, el cual sirve para demostrar la ecuación canónica de la elipse mediante el uso de la construcción de la elipse por anomalía excéntrica.

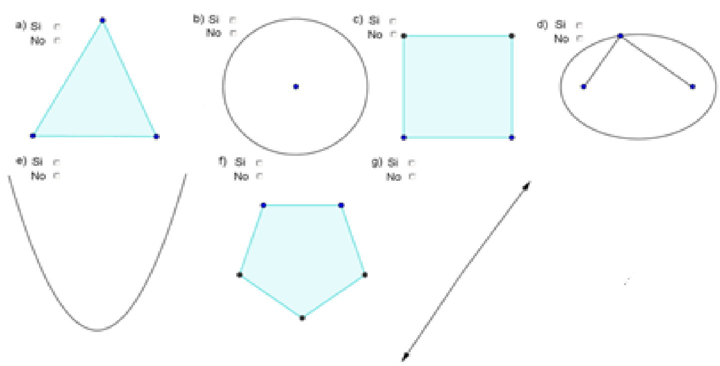
2. ¿Qué pareja de triángulos son semejantes? Escribe una palomita en “si” si lo es o en “no” si no lo es, y luego en los casos afirmativos, establece proporciones entre sus segmentos



Reactivo 2-Test diagnóstico

Ítem 3: Se orienta a determinar si el estudiante interpreta qué figuras geométricas representan un lugar geométrico, cuyos resultados se tendrán en cuenta para dar una mejor explicación en el desarrollo de las actividades.

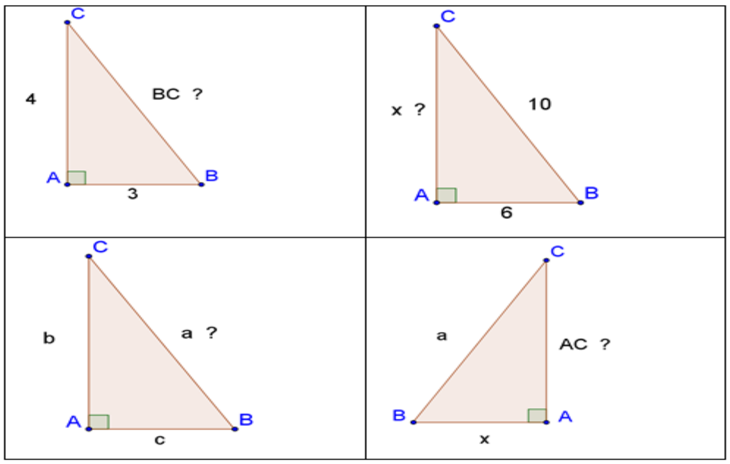
3. ¿Cuál de las siguientes figuras son un lugar geométrico? Escribe una palomita en “si” si lo es o en “no” si no lo es.



Reactivo 3-Test diagnóstico

Ítem 4: Se orienta a determinar si el estudiante resuelve operaciones aritméticas y algebraicas relacionadas con el teorema de Pitágoras, necesarias para relacionar los parámetros *a*, *b* y *c* de la elipse en las actividades.

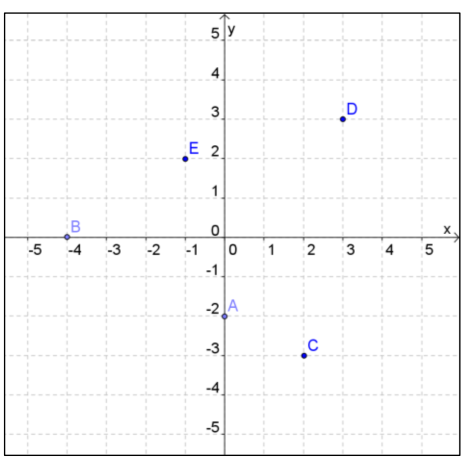
4. Halla el valor ya sea numérico o algebraico de la incógnita "?" utilizando el teorema de Pitágoras.



Reactivo 4-Test diagnóstico

Ítem 5: Pretende saber si el estudiante ubica correctamente puntos en el plano cartesiano, necesario en las actividades para ubicar puntos como el centro, focos y vértices de la elipse.

5. Escribe las coordenadas de los puntos que se muestran sobre el siguiente plano cartesiano.



A (_____.______)

B (_____.______)

C (_____.______)

D (_____.______)

E (_____.______)

Reactivo 5-Test diagnóstico

Ítem 6: Se diseñó con la intención de determinar si el estudiante tiene antecedentes sobre la resolución de operaciones algebraicas al completar el trinomio cuadrado perfecto. Esta operación es necesaria para expresar la ecuación general de la elipse a la forma canónica.

6. Completa las siguientes ecuaciones, para convertirlas a trinomio cuadrado perfecto. a) $x^2 - 10x = 0$ b) $x^2 + 3x = 1$
Reactivo 6-Test diagnóstico

Adicional al diseño de los instrumentos de medición se elaboraron las actividades interactivas que siguen la ruta cognoscitiva descrita en el capítulo I. El objetivo de las actividades es introducir la elipse, por medio de escenarios didácticos interactivos acompañados de un cuestionario. Brevemente, la primera actividad consta de un escenario didáctico donde se simula el trazo de una elipse por el método del jardinero, para que a partir de ésta los estudiantes exploren, descubran y construyan la definición de lugar geométrico de la elipse, y posteriormente estudien los elementos de la curva, propiedades relevantes (visualización y análisis de los niveles de Van Hiele). La segunda actividad consta de un escenario interactivo sobre el movimiento planetario de la Tierra y Marte junto con un cuestionario para dirigir la actividad y explorar la característica de excentricidad de la elipse (análisis y clasificación de Van Hiele). La tercera actividad consiste en que el estudiante siga la demostración de la ecuación canónica de la elipse a partir de la curva trazada, pero esta vez a con ayuda de la construcción geométrica de la elipse por medio del círculo osculador.

3.1.2. Actividades interactivas

Las actividades se diseñaron tomando las sugerencias proporcionadas por la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), los tres primeros niveles del pensamiento geométrico de Van Hiele, y los objetos de enseñanza establecidos en el programa de Matemáticas III de las SEP (2013).

Por ejemplo, los escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI) ejemplifican situaciones en contexto o proyectos de acción práctica, además el ser interactivas da cuenta de uno de los puntos de la didáctica Cuevas-Pluvinage: “Es esencial que el estudiante esté realizando siempre una acción, por lo que a través de la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado”

Cada actividad consta de al menos un EDVI con su respectivo cuestionario. Cada EDVI está diseñado para que sea el estudiante quien esté realizando determinadas acciones a lo largo de cada una de las actividades que se proponen, mediante el movimiento de los objetos geométricos y la resolución de problemas dosificados. El uso de los EDVI’s no requieren de un manejo experto del software, de modo que en cada guía o cuestionario se explica paso a paso las funciones de cada uno de ellos. La información sobre el concepto a enseñar, cumplen con el requisito de *mínima ayuda* (Cuevas & Pluvinage, 2003). Las distintas definiciones de la elipse deberán emerger en forma intuitiva después de cada actividad (actividad individual), y en una discusión grupal (actividad colaborativa), sin que el profesor las proporcione anticipadamente.

Los temas que cubren las actividades se resumen en la Tabla 5:

Nº de la actividad	**Nombre de la actividad**
1	La elipse como lugar geométrico
2	Excentricidad de la elipse

3	3a. Demostración de la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen
	3b. Ecuación canónica y general de la elipse
	3c. Ecuación canónica y general de la elipse con centro (h,k)

Tabla 5. Tema de las actividades interactivas.

Actividad 1: La elipse como lugar geométrico

Como lo sugiere la didáctica Cuevas & Pluvinage (2013) se debe partir de un contexto real para introducir algún concepto. En esta primera actividad (Anexo VI), se propone a los estudiantes diseñar un jardín en forma de elipse, utilizando el método del jardinero. El objetivo es que los estudiantes redacten, en sus propias palabras la definición de la elipse como lugar geométrico. Al concepto matemático se arriba por medio de la resolución de problemas dosificados descritos en el cuestionario y la interacción con el EDVI, donde se exploran y estudian los elementos y propiedades más relevantes de la elipse. Esta primera actividad se divide en 4 secciones:

Sección 1: *Construyendo el trazo de una elipse*

Tiene como objetivo que el estudiante realice el trazo simulado de un jardín en forma de elipse, al seguir las instrucciones de la aplicación del método del jardinero en el EDVI-Jardinero.

Una vez trazada la curva, el estudiante debe registrar en una tabla del cuestionario, los valores de las sumas de las longitudes de varios puntos sobre la elipse a dos puntos fijos llamados focos (estacas del elipsógrafo). Después de registrar los valores de las sumas, el estudiante debe construir la definición de la elipse como lugar geométrico. Al final con ayuda del maestro se discute sobre la definición de la elipse como lugar geométrico de manera más formal, donde el estudiante puede verificar de manera grupal su definición. A continuación se muestra detalladamente la sección uno de la actividad 1.

1. *Sección 1: Construyendo el trazo de una elipse. (Ítem 1)*

Un jardinero desea construir un jardín en forma de elipse, y para ello clava dos estacas en dos puntos fijos llamados F y F’ (focos). El jardinero sujeta los extremos de la cuerda a las estacas, y tensionándola realiza un trazo como lo muestra la figura. *Nota: La longitud de la cuerda es mayor que la distancia de separación de las estacas.*

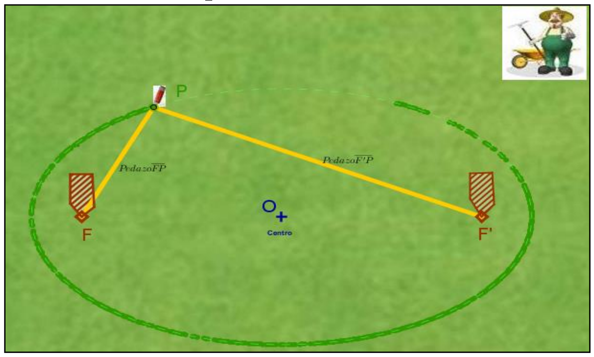
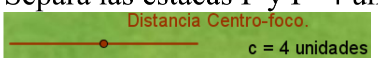
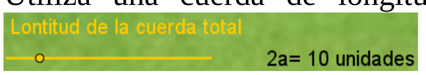


Figura. 1 Jardín elíptico

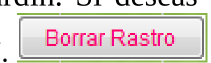
Para hacerlo abre la carpeta *Actividad 1 y* ve al “EDVI-Jardinero”, y realiza siguiendo los siguientes pasos:

a) Separa las estacas F y F’ 4 unidades del centro, dando clic sobre el punto del deslizador 

hasta llevarlo a c=4. (el centro es un punto medio O entre F y F’, o centro de la elipse). *Nota: Llamaremos distancia focal “2c” a la distancia entre los focos.*

b) Utiliza una cuerda de longitud 10 unidades ubicando el punto del deslizador 

c) Para trazar la elipse con el lápiz, da clic en la casilla 

con el fin de activar el rastro. Da clic sostenidamente sobre el punto P, y arrástralo con el mouse suavemente trazando la elipse o contorno del jardín. Si deseas borrar el rastro de la tinta del lápiz, da clic en el botón “Borrar Rastro”. 

d) Una vez trazada la elipse, ubica el punto P de la elipse en cualquier lugar de su contorno y suma las longitudes de los pedazos de las cuerdas $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ que puedes observar en “*VER DATOS*” ubicado en parte derecha de la pantalla. A éste primer punto sobre la elipse lo registraremos como P1 en la tabla 1.

e) Repite el proceso anterior para cuatro puntos diferentes sobre el contorno de la elipse. Registra los datos en la siguiente tabla como puntos P2, P3, P4 y P5:

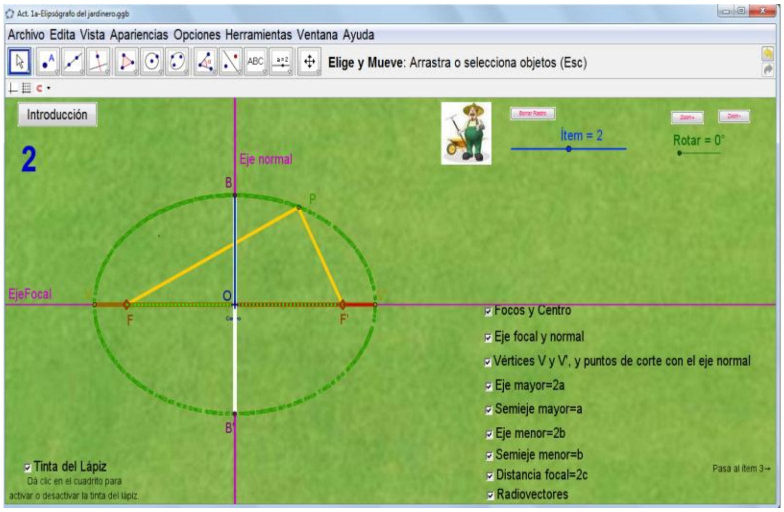
Puntos sobre la elipse	**Longitud del pedazo de cuerda** $\overline{F'P} =$	**Longitud del pedazo de cuerda** $\overline{FP} =$	**Suma de radiovectores o pedazos de cuerdas:** $\overline{F'P} + \overline{FP} =$
P1			
P2			
P3			
P4			
P5			

Tabla 1. Registro de sumas de los pedazos de cuerdas o radiovectores de la elipse
Responde las preguntas 1 y 2 marcando con una palomita ☑ la opción que considere correcta: 1. La suma de las distancias del punto P a los puntos fijos F y F', ¿varía o se mantiene constante? □ $\overline{F'P}+\overline{FP}=\text{Constante}$ □ $\overline{F'P}+\overline{FP}=\text{Variable}$ 2. Compara las sumas $\overline{F'P}+\overline{FP}$ de la tabla 1, con la longitud de la cuerda. ¿Son iguales? □Si □No 3. Teniendo en cuenta lo anterior, concluye con tus propias palabras la condición que definen todos los puntos sobre una elipse, o lugar geométrico de la elipse: ____ ____ ____ ____ 4. En discusión grupal compara tu definición con las de tus compañeros y lleguen a una definición entre todos con ayuda del profesor. ____ ____ ____
Sección 1de la actividad 1-Trazo de la elipse y definición como lugar geométrico

Sección 2: Elementos de la elipse

Como lo sugiere el nivel II de Van Hiele (Análisis), esta sección tiene como objetivo estudiar los elementos más relevantes de la elipse a partir de curva trazada en la sección I. El estudiante participa grupalmente conjuntamente con el profesor para definir cada uno de los elementos de la elipse como: focos, centro, eje focal y normal, vértices, eje y semieje mayor, eje y semieje menor, distancia focal y radiovectores. La forma de estudiar cada uno de estos elementos es de forma visual e interactiva en el EDVI correspondiente.

Al final de la sección, se hace una retroalimentación sobre la definición de la elipse como lugar geométrico de una forma más elaborada, es decir más formal, teniendo en cuenta los elementos estudiados. También se realiza una práctica individual donde el estudiante parametriza algunos de los elementos de la elipse, es decir le asigna valores numéricos. Por medio de la práctica los estudiantes refuerzan las definiciones aprendidas, y comprueban resultados como lo propone la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), por medio de una socialización grupal.

En el EDVI ésta sección se observa así: 
Sección 2 de la actividad 1-Elementos de la elipse en EDVI-Jardinero

Sección3: Simetría de la elipse

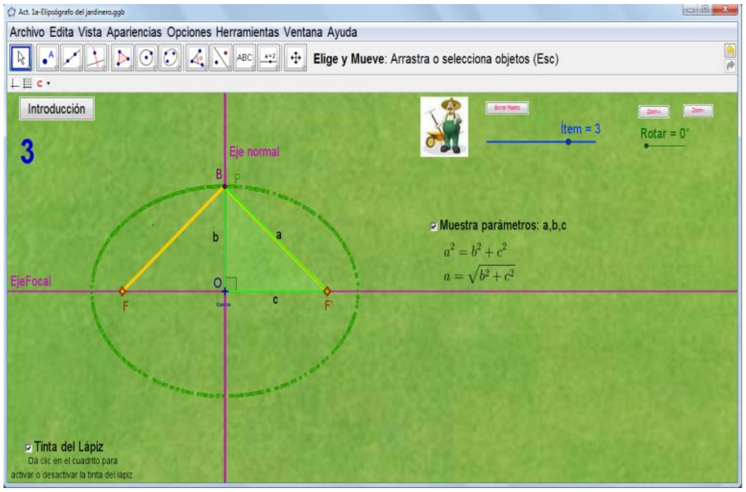
Esta sección tiene como objetivo estudiar la propiedad de simetría en la elipse, la cual ayuda al estudiante a comprender el por qué la longitud de la cuerda de un elipsógrafo equivale a la longitud del eje mayor de la elipse. Esta conclusión pragmática es fundamental en el momento de inferir la ecuación canónica de la elipse a partir de su definición bifocal que plantea que la suma de los radiovectores es igual a una constante.

El estudio de la simetría de la elipse, se realiza a partir del doblado de una hoja anexo donde está calcada la curva, que por medio de una serie de preguntas dosificadas ayudarán al estudiante a comprender esta propiedad.

Sección 4: Relación de los parámetros a, b y c de la elipse. Ítem 3

Esta sección tiene como objetivo estudiar la relación pitagórica que existe entre los parámetros a, b y c de la elipse. Con ayuda del EDVI-Jardinero y utilizando la propiedad de simetría de la elipse, se conduce al estudiante a observar que con un foco, el centro y el punto de intersección del eje normal con la elipse (punto B) se puede formar un triángulo rectángulo, con catetos b, c, e hipotenusa a , como se observa en la figura de abajo.

La relación pitagórica de los parámetros a, b y c, se observa así en el EDVI-Jardinero:



A continuación se detalla la afirmación anterior, de acuerdo al cuestionario que los alumnos tienen:

Pasa al ítem 3 del programa en el EDVI, y sigue los pasos a continuación:

a) Mueve lentamente el punto P y ubícalo sobre el punto B.
En esta posición los pedazos de cuerda $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ son iguales debido a que la cuerda es dividida a la mitad por la simetría de la elipse con el eje normal.
Como la longitud de la cuerda es igual a dos veces "a" entonces la mitad de la cuerda es igual a "a" unidades, por lo tanto la distancia de un foco F o F' al punto B es igual a la longitud del semieje mayor, o sea "a" unidades.

b) Activa la casilla ☑ Muestra parámetros: a,b,c , y observa que el triángulo OBF' es rectángulo, con catetos $\overline{OB}=b$, $\overline{OF'}=c$ e hipotenusa $\overline{F'B}=a$; entonces la relación pitagórica entre dichos parámetros es:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a=\sqrt{b^2+c^2},\ b=\sqrt{a^2-c^2},\ c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Sección 4 de la actividad 1-Relación pitagórica de los parámetros a, b y c de la elipse

Al final de la sección se da un ejemplo numérico sobre el cálculo de la longitud del semieje mayor, utilizando la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$, y se propone una serie de ejercicios para controlar el avance de los estudiantes (Anexo VI).

Actividad 2: Movimiento planetario y la excentricidad de la elipse

Esta actividad plantea como problema en contexto el movimiento de los planetas Tierra y Marte simulado en su respectivo EDVI (Movimiento planetario), para analizar y estudiar otras características de la elipse como lo es su excentricidad. También se pretende explorar la traslación entre el registro de representación numérico y el geométrico, al relacionar el valor de la excentricidad de una elipse con su "redondez".

La actividad 2 (Anexo VII) se enmarca en los niveles I, II y III de Van Hiele, y se divide en dos secciones, más una serie de ejercicios propuestos para controlar el avance de los estudiantes.

Sección 1: Órbitas de los planetas Tierra y Marte

En esta sección se motiva al estudiante a ver la importancia de la elipse en el movimiento planetario de la Tierra y Marte, como uno de los grandes descubrimientos que enunció Kepler en una de sus tres leyes. A partir de la observación del movimiento planetario simulado en el EDVI-Movimiento planetario, se cuestiona al estudiante opinar sobre cual órbita planetaria parece ser más redonda, además se pide registrar en el cuestionario los datos de distancia más lejana del Sol a un planeta (afelio), y más cercana (perihelio). Posteriormente, a través de preguntas dosificadas se encamina al estudiante armar un sistema de ecuaciones lineales (SEL) 2x2, que involucren los parámetros a y c de la elipse con los valores de afelio y perihelio. Con el conjunto solución del SEL que son la longitud de la semi-distancia focal "c", y semieje mayor "a", se pide finalmente calcular la relación c/a para cada una de las órbitas elípticas planetarias.

A continuación se detalla la sección 1 de la actividad 2:

1. Sección 1: Órbitas de los planetas Tierra y Marte

Abre en la carpeta *Actividad 2* el archivo del "EDVI-Movimiento planetario" y da clic en el botón Play / Pausa, y observa el movimiento de los planetas.

Marca con una palomita ☑ la respuesta que creas correcta:

1. La distancia del Sol a la Tierra y del Sol a Marte, ¿es igual en todo el movimiento, o varía? *Nota: Observa los valores de las distancias en el recuadro inferior derecho de la pantalla llamado "Datos de longitud"*

   □Constante □Varía

2. ¿Cuál de las dos órbitas observas que es más redonda?

   □Órbita terrestre □Órbita marciana □Las dos son iguales

<u>Dato histórico</u>

En 1609 Johannes Kepler (1571-1620), basado en las observaciones del astrónomo Tycho Brahe, enunció las leyes referentes a las órbitas de los planetas. Una de ella establece que los planetas describen **órbitas elípticas (*en forma de elipse*)** alrededor del Sol, en las cuales **el Sol se encuentra en uno de los focos**.
El modelo de órbitas elípticas de los planetas alrededor del Sol, derrocó al modelo geocéntrico de Ptolomeo que decía que la Tierra era el centro del universo, y también explicar como el Sol parece estar más lejos de la Tierra en el verano del hemisferio norte (como podemos apreciar en México en el mes de Junio), época en la cual la Tierra se encuentra en las zonas más distantes de la órbita con respecto al Sol.

<u>Definiciones</u>: La distancia más cercana de un planeta al Sol se le llama perihelio, y a la más lejana afelio.

a) Registra el valor aproximado de la distancia del Sol a la Tierra, más lejano y cercano, e igualmente con los valores de distancia del Sol a Marte, en el siguiente recuadro

Afelio terrestre = ________________________ (millones de km)

Perihelio terrestre = ______________________ (millones de km)

Afelio marciano = _________________________ (millones de km)

Perihelio marciano = _______________________ (millones de km)

La aplicación en el EDVI-*Movimiento Planetario*, sobre el movimiento simulado de los planetas Tierra y Marte, se observa así:

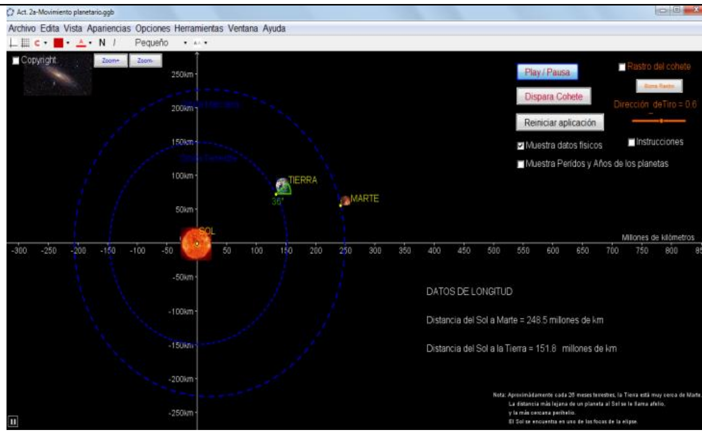
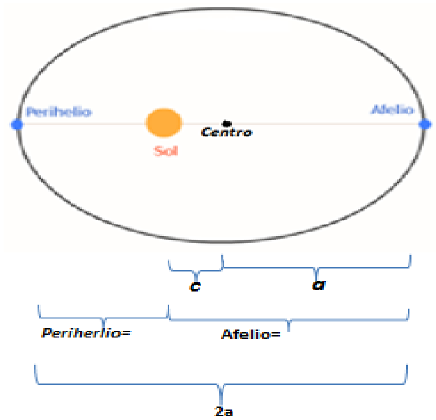


Figura 25. Sección 1 de la actividad 2-EDVI-Movimiento Planetario

3. Observa la siguiente gráfica, y arma las ecuaciones que relacionan los parámetros "a" y "c" de la elipse, teniendo en cuenta que el Sol está en uno de los focos, y que la los vértices de la elipse son los puntos más extremos de ésta.



La ecuación de afelio y perihelio para un planeta es respectivamente:

□ $\begin{array}{l} Afelio = a + c, \\ Perihelio = a - c \end{array}$ □ $\begin{array}{l} Afelio = a - c, \\ Perihelio = a + c \end{array}$ □Otra________________

4. El sistema de ecuaciones para el afelio y perihelio para el planeta Tierra, son respectivamente:

□ $\begin{cases} a + c = 147 \\ a - c = 152 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a + c = 152 \\ a - c = 147 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a + c = 249 \\ a - c = 207 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a + c = 207 \\ a - c = 249 \end{cases}$

5. La solución para el sistema de ecuaciones correcto, del punto anterior es:

□ $a = 2, c = 150$ □ $a = 150, c = 2$ □ $a = 228, c = 21$ □ $a = 21, c = 228$

6. El sistema de ecuaciones para el afelio y perihelio para el planeta Marte, son respectivamente:

$\square \begin{cases} a+c=147 \\ a-c=152 \end{cases}$ $\square \begin{cases} a+c=152 \\ a-c=147 \end{cases}$ $\square \begin{cases} a+c=249 \\ a-c=207 \end{cases}$ $\square \begin{cases} a+c=207 \\ a-c=249 \end{cases}$

7. La solución para el sistema de ecuaciones correcto, del punto anterior es:

$\square\, a=2, c=150$ $\square\, a=150, c=2$ $\square\, a=228, c=21$ $\square\, a=21, c=228$

8. Calcula la relación de los parámetros c y a, de cada planeta

Tierra	Marte
$\frac{c}{a}=$	$\frac{c}{a}=$

Sección 1 de la actividad 2- Cuestionario para un armar un SEL 2x2 del afelio y perihelio planetario, para el cálculo de la relación c/a para cada planeta

Sección 2: Excentricidad en la elipse

Esta sección tiene como objetivo introducir el concepto de excentricidad en la elipse, por medio del trazo simulado de varias curvas elípticas en el EDVI-Excentricidad, con un mismo valor del semieje mayor "a" y diversos valores de la semi-distancia focal "c". El estudiante debe registrar en una tabla los valores de c y a de cada elipse trazada, calculando su relación c/a.

Por medio de preguntas dosificadas y el principio de mínima ayuda sugerido en la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), se conduce al estudiante a comprender que el parámetro $e=\frac{c}{a}$ (valor de la excentricidad el cual oscila entre cero y uno), se relaciona con el grado de redondez de la elipse, de modo que a entre más cercano a la unidad sea el valor de "e", la elipse es más "ovalada", y entre más cercano a cero es más circular. Al relacionar la parte geométrica del grado de redondez de una elipse con un valor numérico permite al estudiante fomentar la traslación diversos registros de representación como lo propone uno de los puntos de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), al menos los registros de representación numérico con el gráfico.

El cuestionario de la sección 2, también tiene como objetivo buscar que el estudiante, clasifique a la circunferencia como un caso límite de la elipse, cuando su distancia focal es cero. Para ello se pide al estudiante realizar un trazo en el EDVI de una elipse cuyos focos están uno encima del otro (en las mismas coordenadas). Este ítem es importante porque es uno de los puntos del nivel III del pensamiento geométrico de Van Hiele (Clasificación), donde el estudiante realiza clasificaciones de la curva estudiada.

Al final de la sección se hace una conexión entre la sección 1 y 2, al cuestionar nuevamente al estudiante sobre que órbita planetaria es más redonda, y se espera una respuesta más formal donde relacionen el valor paramétrico de c/a calculado en la sesión uno, con el grado de redondez de cada órbita planetaria elíptica. Esta última pregunta es importante en el sentido que sabremos si el estudiante aplica el concepto de excentricidad asociado a un valor numérico respecto del geométrico, en un caso real o contextualizado.

A continuación se detalla la sección 2, de la actividad 2:

2) Sección 2: Excentricidad en la elipse

Abre en la carpeta *Actividad 2,* el archivo “EDVI-Excentricidad”, y construye el trazo de varias elipses con el elipsógrafo. La longitud de la cuerda del elipsógrafo será de 20 unidades.
Recuerda que el eje mayor de la elipse mide lo mismo que la longitud de la cuerda, por lo tanto el semieje mayor de la elipse a trazar es de 10 unidades.

Para construir las elipse lee y sigue los siguientes pasos:

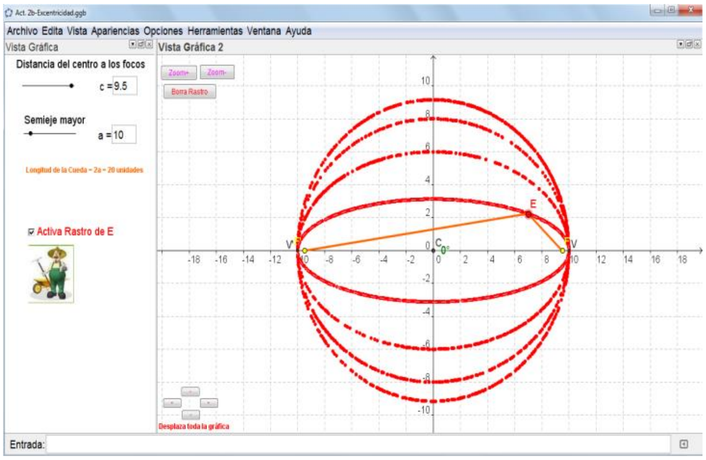
a. Con el deslizador Semieje mayor a = 10, da clic sobre el punto y deslízalo hasta ubicar el valor en a =10. Esta magnitud se va a mantener fija**.** También puedes digitar dentro de la casilla en valor numérico+Enter.

b. Activa la casilla ☑ Activa Rastro de E y separa los focos F y F’ 8 unidades es decir con un $c = 4$ unidades.

c. Traza una elipse al mover el punto E lentamente, dando clic sobre éste y arrastrándolo con el mouse.

d. Realiza el trazo de 3 elipse más para: c=6, c=8 y por último c=9.5. Si desea borrar el rastro, se debe dar clic en el botón Borra Rastro

La aplicación del trazo simulado de las elipse en Geogebra, se observa así:



Sección 2 de la actividad 2-Trazo simulado de las elipses en el EDVI-*Excentricidad*

e. Observa cada elipse trazada y registra en la siguiente tabla los valores de c y a para cada una de ellas. Luego calcula el cociente entre c y la longitud del semieje menor a.

Elipse	**c**	**a**	**c/a**
1		10	
2		10	
3		10	
4		10	

Tabla 2. Registro de valores c y a para cada elipse

Responde a continuación, marcando solo una de las siguientes respuestas, con una palomita ☑

1. ¿Qué observas de la figura cada vez que c es más grande o se alejan los focos?
   □La elipse "se alarga o se hace más ovalada" □La elipse es más "redonda".

2. ¿Cómo varía el cociente c/a cada vez que se alejan los focos?
   □Se acerca más a la unidad (1) □Se acerca más a cero.
3. ¿Qué concluyes al respecto del cociente c/a respecto de la "redondez" de la elipse?
   □Entre mayor sea el cociente c/a, la elipse es más "redonda", y de lo contrario es más "ovalada"
   □Entre menor sea el cociente c/a la elipse es más "redonda", y de lo contrario es más "ovalada"
4. ¿Qué sucede si la distancia focal es cero, o sea si los focos están uno encima del otro? Borra el rastro de la última elipse. Acerca los focos de modo que uno quede encima del otro, para ello digita en la casilla de "Distancia del centro a los focos" la cantidad 0.001+Enter, y mueve lentamente el punto E con el mouse. ¿Qué observas de la elipse trazada?

□La nueva elipse es tan “redonda” que se considera una circunferencia
□La nueva elipse se “alarga” demasiado

5. ¿Bajo qué condición se considera que la circunferencia es una elipse?

____
____
____
____
____

Definición:
La excentricidad e de una elipse se define como el cociente de la longitud focal, entre la longitud del semieje mayor.

$$e = \frac{c}{a}$$

El parámetro e mide justamente la redondez de una elipse. Cómo c<a siempre, entonces:

$$0 < e = \frac{c}{a} < 1$$

Entre más pequeño sea el parámetro c, la elipse es más redonda y,
Entre más grande sea el parámetro c, la elipse es más achatada
Cuando c=0 la elipse es una circunferencia.

6. De acuerdo al valor de la excentricidad de los planetas Tierra y Marte calculada en la sección 1, ¿qué órbita elíptica es más “redonda” y cuál más “ovalada”? Explica tu respuesta

____
____
____
____
____

Sección 2 de la actividad 2-Cuestionario de la actividad 2 para introducir el concepto de excentricidad

Al final de la actividad 2, se propone una serie de ejercicios para reforzar y controlar el avance de los estudiantes, sobre lo estudiado (anexo VII).

Actividad 3: Ecuación algebraica de la elipse

Esta actividad se estructuró en tres partes: 1) Demostración sintético-analítica de la ecuación canónica de la elipse, 2) Ecuación canónica y general de la elipse con centro en el origen, 3) Ecuación canónica y general de la elipse con centro (h,k).

Las ecuaciones algebraicas desarrolladas en el presente trabajo, son aquellas que geométricamente modelan la elipse con ejes focal y normal, paralelos a la abscisa y ordenada respectivamente.

Actividad 3A: Demostración sintético-analítica de la ecuación canónica de la elipse

La forma más común de demostrar algebraicamente la ecuación de la elipse y de forma tradicional, se detalla en el anexo III. Sin embargo la propuesta del presente trabajo pretende equilibrar la parte algebraica con la geométrica, enriqueciendo esta última. Para ello se plantea una demostración sintético-analítica de la ecuación canónica de la elipse por medio de la construcción geométrica del círculo osculador o anomalía excéntrica, la cual proponen Contreras, Contreras, García (2002) y el libro de Geometría Analítica dinámica de Cuevas, Mejía, Pluvinage & Gonzalo (2005).

El objetivo de esta actividad es hacer que el estudiante participe de la demostración canónica de la elipse con ayuda del profesor, y relacione los registros de representación geométrico y algebraico, como lo propone la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003).

Debido a lo complejo que resulta al estudiante las demostraciones matemáticas, se diseña un cuestionario donde se divide el problema en sub-problemas que representen las operaciones parciales constituyen tal demostración, como la aplicación de semejanza de triángulos, despeje de ecuaciones, entre otras.

La actividad 3A, se estructuro en dos secciones que se detallan en el anexo VIII, la primera consiste en el trazo de una elipse utilizando el "EDVI-Elipse por medio del círculo osculador". La segunda pretende que el estudiante, participe del proceso matemático de demostrar paso a paso la ecuación canónica de la elipse a partir de la construcción del trazo de la misma. La tercera propone realizar ejercicios de operación inversa como lo sugiere uno de los puntos de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), por dicha razón al final de esta actividad, se realiza una retroalimentación sobre ejercicios de operación inversa que muestra como hallar la ecuación canónica de la elipse dados sus parámetros, y viceversa.

Actividad 3B. Ecuación Canónica y general de la elipse con centro en el origen

Esta actividad (Anexo IX) propone al estudiante desarrollar ejercicios de operación inversa, basado en las dos operaciones fundamentales de la Geometría Analítica (Lehmann, 1989, p. 32) como refuerzo a la actividad 3A donde se demostró la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen. La actividad 3B se divide en cuatro secciones, que se detallan a continuación:

Sección 1: Interpretación gráfica de la elipse a partir de sus elementos

Esta sección (Anexo IX, sección 1) sigue uno del puntos de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) de relacionar registros de representación, que en este caso es del algebraico al geométrico. El objetivo es interpretar la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen, de modo que dados los elementos de la elipse (longitudes del eje mayor y menor de una elipse), se espera que el estudiante halle la respectiva ecuación canónica que modela la curva, además las coordenadas de sus focos, vértices, y finalmente con ayuda del “EDVI -Elipsógrafo” realice el trazo de dicha elipse.

Sección 2: Ecuación Canónica de la elipse de la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Esta sección (Anexo IX, sección 2) tiene como objetivo que el estudiante clasifique entre una elipse horizontal y vertical (nivel III de Van Hiele). Al finalizar la sección el estudiante debe bosquejar una elipse vertical en el EDVI, simulando su trazo con un elipsógrafo, y estudiar grupalmente las características de la elipse horizontal y vertical, relacionando los registros de representación algebraica con el geométrico.

Sección 3: Ecuación general de la elipse

Esta sección (Anexo IX, sección 3) tiene como objetivo que el estudiante siga los diferentes procesos de operación inversa algebraicos, al pasar de la ecuación canónica de la elipse a la general, y viceversa. También pretende que el estudiante interprete a la elipse como una ecuación de segundo grado con dos incógnitas, de cierto tipo o forma.

Sección 4: Ejercicio en clase

Esta sección (Anexo IX, sección 4) consta de 9 ítems, que pretenden reforzar lo aprendido en las anteriores secciones. Del ítem 1 al 4 se espera que el estudiante halle los elementos de una elipse e interprete su gráfica a partir de su ecuación canónica. El estudiante puede comprobar sus resultados de la gráfica con ayuda del “EDVI-Elipsógrafo”.

Del ítem 5 al 8, se espera que el estudiante realice operaciones algebraicas inversas, para hallar la ecuación canónica de una elipse a partir de su ecuación general, así mismo obtener las características de la curva (parámetros, forma) a partir de su ecuación canónica.

El ítem 9 tiene como objetivo realizar la operación inversa del ítem 1, donde se pide hallar la ecuación canónica de una elipse, a partir de su gráfica.

Actividad 3C. Ecuación canónica y general de la elipse con centro (h, k)

Esta sección (Anexo X) tiene como objetivo que el estudiante realice ejercicios de operación inversa y relacione registros de representación (geométrico y algebraico) como lo propone uno de los puntos de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003).

La actividad se estructuró en 4 secciones, que son:

Sección 1: *Traslación de ejes coordenados*

Esta sección tiene como objetivo que el estudiante participe de la explicación de la traslación de ejes, para posteriormente llegar a la ecuación canónica de la elipse con centro (h,k).

Sección 2: *Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) a partir de su gráfica.*

Esta sección va del ítem 1 al 4, y tiene como objetivo que el estudiante relacione registros de representación de lo geométrico a lo algebraico. Dada la gráfica de una elipse en el plano cartesiano, el estudiante debe extraer los valores de sus parámetros y centro, para hallar la respectiva ecuación canónica de la elipse.

Sección 3: Ecuación general de la elipse con centro (h, k)

Esta sección tiene como objetivo que el estudiante participe con el profesor de los procesos de operación inversa algebraicos, al pasar de la ecuación canónica de la elipse a la general, y viceversa. Al final se realiza una participación grupal sobre las características de la ecuación general de la elipse.

Sección 4: Determinación de parámetros y gráfica de la elipse con centro (h, k), a partir de su ecuación canónica

Esta sección es la operación inversa de la sección 2 y consta de 5 ítems, que tienen como objetivo que el estudiante relacione el registro de representación algebraico al geométrico, que consiste en dada la ecuación canónica de la elipse, el estudiante debe hallar los diferentes parámetros de la curva, y bosquejar su gráfica con ayuda del "EDVI-Elipsógrafo". Por medio del programa el estudiante puede verificar sus resultados, al comprobar que la ecuación de la elipse bosquejada sea la misma planteada en el ítem 1.

3.1.3. Postest

Con el postest se pretende analizar el rendimiento de los estudiantes respecto a los conocimientos adquiridos en las actividades, y que habilidades adquirieron respecto de las deficiencias que presentaron en el test diagnóstico. El rendimiento se calificará de acuerdo a las preguntas acertadas del postest comparadas con las aquellas que tienen el mismo objetivo en las actividades, y prueba diagnóstico.

El postest consta de 16 ítems (Anexo XI), similares a los ejercicios propuestos en las actividades, que siguen uno de los puntos de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) de iniciar con un problema en contexto, que se presenta a continuación:

> Se va a remodelar el conjunto residencial Villas de Chalco, con la construcción de un gran jardín y una alberca en forma de elipse. Para construir el jardín contratan un jardinero, y le piden construir el mayor jardín elíptico que se pueda inscribir en la zona verde rectangular

de 20 x 12 m. Para la construcción de la alberca se contrató un ingeniero el cual calculó que la posición de ésta obedece a la ecuación $25x^2+16y^2-300x+256y+1524=0$
Problema en contexto para el postest

El problema en contexto o proyecto de acción práctica gira en torno al trazo elíptico de dos curvas para la construcción un jardín y una alberca. En primera instancia, el estudiante debe simular en el *EDVI-El Jardinero y el Ingeniero,* el trazo de un jardín elíptico en una zona rectangular, y partir de la gráfica el estudiante debe responder, el cuestionario diseñado para conducir la actividad, del ítem 1 al 6, donde se pide hallar las coordenadas del centro de dicha elipse, sus parámetros, modelo algebraico, y finalmente el cálculo de su excentricidad. A continuación se detallan los seis primeros ítems:

1. Abre el archivo EDVI llamado "El jardinero y el ingeniero" y dibuja la mayor elipse (jardín) que se pueda inscribir sobre el rectángulo verde. Para ello, ubica el centro del elipsógrafo en todo el centro de la zona rectangular. ¿Cuáles son los valores de las coordenadas para el centro del jardín elíptico?

   □ $h=8, k=-12$ □ $h=-12, k=8$ □ $h=-8, k=12$ □ $h=-12, k=-8$

2. ¿Cuál es la longitud del semieje mayor y menor de la elipse trazada por el jardinero?

   □ $a=20, b=12$ □ $a=12, b=20$ □ $a=6, b=10$ □ $a=10, b=6$

3. ¿Cuál es la longitud de la semi-distancia focal?(para calcularla utiliza la relación pitagórica $a^2=b^2+c^2$)

   □ $c=16$ □ $c=4$ □ $c=64$ □ $c=8$

4. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones canónicas, modela la elipse del jardín elíptico?

   □ $\dfrac{(x+12)^2}{36}+\dfrac{(y-8)^2}{100}=1$

   □ $\dfrac{(x-12)^2}{100}+\dfrac{(y+8)^2}{36}=1$

- ☐ $\frac{(x+12)^2}{100}+\frac{(y-8)^2}{36}=1$
- ☐ $\frac{(x-12)^2}{36}+\frac{(y+8)^2}{100}=1$

5. ¿La elipse es horizontal o vertical? Explica tu respuesta

____

____

____

6. Calcula la excentricidad del jardín elíptico, y marca con una palomita la opción correcta.

☐ $e=\frac{4}{5}$ ☐ $e=\frac{3}{5}$ ☐ $e=\frac{5}{4}$ ☐ $e=\frac{5}{3}$

Ítems 1 al del postest-De la gráfica a la ecuación canónica

En segunda instancia, como lo sugiere la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), se propone del ítem 7 al 13 realizar la operación inversa a los a los 6 primeros ítems. El estudiante en esta parte debe realizar operaciones algebraicas para obtener la ecuación canónica de una elipse a partir de su ecuación general (ecuación de la alberca elíptica). Posteriormente se debe hallar los elementos y parámetros de la elipse a partir de la ecuación canónica, para que el estudiante interprete la elipse gráficamente, realizando su respectivo trazo con ayuda del EDVI. Finalmente en el ítem 13 el estudiante debe calcular la excentricidad para la alberca en forma de elipse.

7. Si la ecuación hallada por el ingeniero para la alberca en forma de elipse fue $25x^2+16y^2-300x+256y+1524=0$. Describe las características que explique por qué es la ecuación general de una elipse.

*Características del porque es la ecuación general de una elipse:*____

____

____

____

____

Para la anterior ecuación, realiza el procedimiento algebraico que permita llegar de la ecuación general a la canónica de dicha elipse, y marca con una palomita la respuesta correcta:

- ☐ $\frac{(x+6)^2}{16}+\frac{(y-8)^2}{25}=1$
- ☐ $\frac{(x-6)^2}{25}+\frac{(y+8)^2}{16}=1$
- ☐ $\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y+8)^2}{25}=1$
- ☐ $\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+8)^2}{16}=1$

Procedimiento para llegar a la ecuación canónica:

8. ¿Cuáles son los valores de las coordenadas para el centro, de la alberca elíptica?

   □ $h=6, k=-8$ □ $h=-6, k=8$ □ $h=8, k=-6$ □ $h=-8, k=6$

9. ¿Cuál es la longitud del semieje mayor y menor de la elipse trazada?

   □ $a=16, b=25$ □ $a=256, b=625$ □ $a=4, b=5$ □ $a=5, b=4$

10. ¿Cuál es la longitud de la semi-distancia focal?(para calcularla utiliza la relación pitagórica $a^2=b^2+c^2$)

    □ $c=9$ □ $c=34$ □ $c=3$ □ $c=1$

11. ¿La elipse es horizontal o vertical? Explica tu respuesta

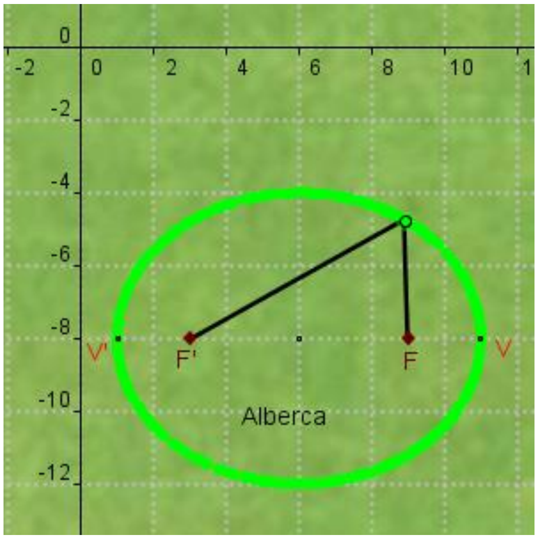
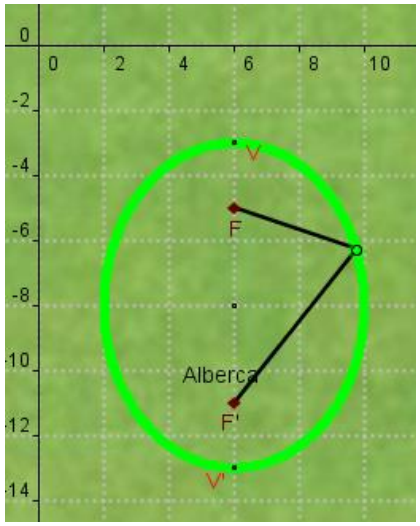
____

____

____

12. Construye con el elipsógrafo en GeoGebra la alberca en forma de elipse, utilizando las respuestas a las preguntas 8, 9 y 10. ¿Cuál de las siguientes figuras representa alberca

en forma de elipse construida por el ingeniero?

□ 	□ 

13. Calcula la excentricidad de la alberca elíptica, y marca con una palomita la opción correcta.

□ $e = \frac{4}{5}$ □ $e = \frac{3}{5}$ □ $e = \frac{5}{4}$ □ $e = \frac{5}{3}$

Ítems 7 al 13 del postest-De la ecuación general a la gráfica

El ítem 14 consiste en evaluar si el estudiante comprende el concepto de excentricidad, al comparar el grado de redondez entre las elipse trazadas (jardín y alberca) relacionadas con los respectivos valores numéricos de excentricidades calculados en los ítems 6 y 13.

14. ¿Cuál de las dos elipses es más redonda, la del jardín o la alberca? Explica tu respuesta.

____

____

____

Ítem 14 del postest-Relación entre registros de representación numérico con el gráfico al aplicar el concepto de excentricidad

El ítem 15 pretende explorar la destreza de los estudiantes para determinar las coordenadas de puntos específicos en una elipse dados sobre el plano cartesiano.

15. Las coordenadas de los focos y vértices de la elipse de la alberca son:

□ F'(6,–5) y F(6,-11); V'(6,-3) y V(6,-13)

□ F(–5,6) y F'(-11,6); V(-3,6) y V'(-13,6)

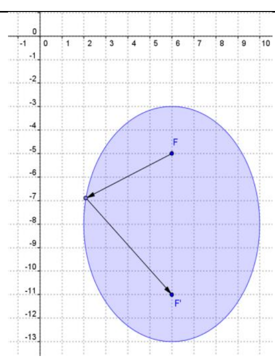
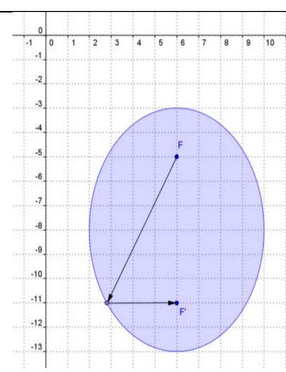
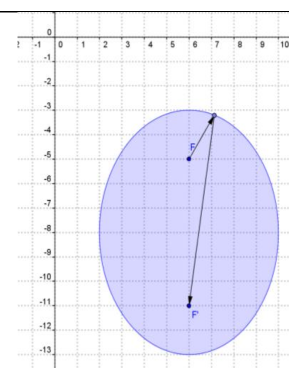
□ F(6,–4) y F'(6,-12); V(6,-3) y V'(6,-13)

□ F(6,–3) y F'(6,-13); V(6,-5) y V'(6,-11)

Ítem 15 del postest-Coordenadas de focos y vértices en la elipse

Por último, el ítem 16 consiste en una pregunta abierta, que pretende evaluar la aplicación definición de la elipse como lugar geométrico. Para ello se propone el siguiente problema en contexto:

16. *Gina, Héctor y Alfredo realizan una competencia en la alberca elíptica, que consiste en partir nadando de un foco de la elipse, tocar luego un punto cualquiera sobre la misma y por último llegar nadando al otro foco. Todos toman trayectorias diferentes como se muestra en las siguientes figuras:*

Alfredo	*Gina*	*Héctor*
		

Al final de la competencia ganó Gina, sin embargo Alfredo argumenta que no es justo porque el recorrió más distancia que Gina, Héctor argumenta que la mayor distancia la

recorrió él mismo, porque dio vuelta hacia atrás y luego se dirigió al otro foco. Sin embargo, Gina dice que fue justo porque todos recorrieron la misma distancia en diferentes trayectorias ¿Quién tiene la razón? Explica tu respuesta.
Ítem 16. Aplicación de la definición de elipse como lugar geométrico

Se espera que el estudiante analice el problema, y haga uso de la definición de la elipse como lugar geométrico estudiada en la actividad 1. Una respuesta óptima para este ítem, es que Gina tiene la razón porque si todos los participantes parten de un foco de la alberca en forma de elipse, luego tocan un punto de la orilla de la alberca elíptica y finalmente llegan al otro foco, van a recorrer la misma distancia, ya que la suma de las distancias de un punto cualquiera sobre la elipse a dos puntos fijos llamados focos siempre es la misma.

3.2. Diseño de la aplicación de los instrumentos y actividades en la población estudio

La secuencia didáctica propuesta en el trabajo exigió reunir ciertos criterios para su aplicación con el fin de obtener resultados más precisos y acordes con las características para quienes fue construido. Para la aplicación de los instrumentos y actividades se eligió un grupo de 11 estudiantes de IV semestre de preparatoria del Centro Educativo Damián, el cual está ubicado en Valle de Chalco del Estado de México. La directora autorizó realizar la experimentación, y ofreció los recursos de la institución, entre ellos la sala de informática con una capacidad de computador por estudiante.

Se programó un plan de trabajo, organizado en la Tabla 6. Posteriormente, el investigador recogió la información a partir de una entrevista con el maestro de Matemáticas encargado del grupo, quien afirma que por falta de tiempo, no pudo haber presentado el tema de la elipse e hipérbola en el semestre anterior según lo pide el programa curricular de la SEP, pero añadió haber visto temas previos para la enseñanza de las cónicas, como resolver ecuaciones de segundo grado y completar el trinomio cuadrado perfecto.

Sesión	Fecha	Hora	Actividad
1	17 / Junio / 2013	10-12	Presentación, aplicación del diagnóstico de conocimientos y adecuación del software
2	19 / Junio / 2013	11-13	Aplicación de la actividad 1 (primera parte)
3	20 / Junio / 2013	12-14	Aplicación de la actividad 1 (segunda y tercera parte)
4	21 / Junio / 2013	12-14	Aplicación de la actividad 2
5	24 / Junio / 2013	8-10	Aplicación de la actividad 3A
6	25 / Junio / 2013	12-14	Aplicación de la actividad 3B
7	27 / Junio / 2013	11-13	Aplicación de la actividad 3C
8	03 / Julio / 2013	8-10	Aplicación de la evaluación

Tabla 6. Plan de trabajo para la experimentación

El tema se desarrolló en un tiempo de 12 horas según lo establecido en el programa curricular de la SEP, en cada actividad se empleó dos horas, desde la segunda hasta la séptima sesión. Para la primera y última, fueron 4 horas adicionales que fueron destinadas para realizar el diagnóstico, la instalación de los programas en la sala de cómputo, y la evaluación.

Para la experimentación, fue necesario disponer de una sala de informática con una cantidad de computadores suficiente para que cada estudiante ocupara uno (Figura 26). En la recolección de datos y análisis de los mismos se designaron los siguientes instrumentos:

- Hojas de trabajo de los estudiantes: Allí el estudiante responde a los puntos de cada guía de actividades, así como el diagnóstico y evaluación.
- Video grabaciones: Este material video grabado son fragmentos de videos (poco extensos), que son requeridos para observar detalladamente el desarrollo de momentos clave en las sesiones de trabajo. En este material se identifican aspectos relacionados con el actuar de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades y en el ambiente computacional. Se centra la atención en la participación de los estudiantes en cuanto a respuestas y preguntas, así como en las expresiones de los estudiantes que se ponen de manifiesto en torno a una experimentación o situación determinada.

- Bitácora: son observaciones detalladas y registradas en un cuadernillo, sobre las dificultades, intervenciones o interpretaciones que presentaban los estudiantes a medida que desarrollaban las actividades.

Figura 26. Ambiente computacional de trabajo

3.3. Descripción de las sesiones de experimentación

En general para cada sesión los estudiantes recibieron individualmente una guía impresa de la respectiva actividad y cada uno trabajó con un computador en los EDVI's para responder a las preguntas de cada cuestionario.

3.3.1. Descripción de la sesión 1

En la primera sesión, con la colaboración del profesor de informática encargado se creó una cuenta de Windows llamada "Geogebra" la cual restringía el uso de internet con el fin de evitar que los estudiantes tuvieran distracciones (desventaja de ciertas TIC). Se instaló el programa de Geometría dinámica Geogebra en cada computador y se guardó en su escritorio una carpeta con el nombre "Actividades Elipse-CED", que contenía a su vez tres carpetas más con los cuestionarios en PDF y los respectivos EDVI's sobre la elipse.

Se hizo la presentación al curso de estudiantes de IV semestre de preparatoria, a quienes se les explicó el plan de trabajo y las actividades a desarrollar. Ese mismo día se realizó el test diagnóstico de conocimientos a 10 de 11 estudiantes, con una duración de una hora y no requirió del uso del software; los estudiantes respondieron individualmente y no tuvieron dificultad en entender el formato del cuestionario.

3.3.2. Descripción de la sesión 2

Antes de iniciar con el cuestionario de la actividad 1, se dio una información breve de la elipse como cónica, de manera que el profesor mostró un cono de plastilina y realizó varios cortes sobre éste, obteniendo cuatro curvas distintas (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola); con ello se logró visualizar las figuras cónicas entre ellas la elipse (nivel I de Van Hiele).

Posteriormente, se da una explicación a los estudiantes que a dicha curva obtenida por un corte trasversal a un cono (corte no paralelo a una de las generatrices del cono) se le denomina *elipse*. Los estudiantes comprendieron fácilmente por qué la elipse se le define como figura cónica al asociarla con el cono. La forma de explicar el por qué la elipse es una curva cónica a partir de una acción en contexto, sigue uno de los puntos de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), la cual propone que nunca se debe partir del concepto o definición, sino brindar al estudiante herramientas e información que le permita construir su propio conocimiento.

Una vez realizado el corte al cono y hacer observaciones sobre la acción descrita, se procedió al desarrollo de la actividad 1, en la cual participaron 9 de 11 estudiantes. La reacción de muchos estudiantes fue explorar el programa y al comienzo no seguir exactamente las medidas que se pidieron para trazar la elipse; también exploraron funciones del software de geometría dinámica, donde cambiaban el color al rastro. Se desarrollaron 2 de 4 secciones debido a un evento extra-escolar, por lo que se debió suspender el desarrollo de la actividad.

3.3.3. Descripción de la sesión 3

En esta sesión se desarrollaron las dos últimas sesiones de la actividad 1. Debido a los resultados presentados en el test diagnóstico de conocimientos, el profesor consideró pertinente intervenir para explicar el teorema de Pitágoras, y proponer ejercicios prácticos de refuerzo al final de la actividad.

3.3.4. Descripción de la sesión 4

En esta sesión, participaron 10 de 11 estudiantes, que desarrollaron la actividad 2. Se observó un mejor dominio de la herramienta por parte de los estudiantes, donde de forma interactiva con los EDVI's respondían simultáneamente el cuestionario propuesto, que tenía como objetivo introducir el concepto de excentricidad a partir de la aplicación simulada del movimiento planetario.

3.3.5. Descripción de la sesión 5

Debido a actividades extra-escolares, en esta sesión asistieron 6 estudiantes, los cuales participaron junto con el maestro sobre la demostración geométrico-analítica de la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen propuesta en la actividad 3A. Para las deficiencias de temas prerrequisito observadas en el análisis de las prueba diagnóstico, se consideró pertinente, por parte del maestro, dar una explicación previa sobre semejanza de triángulos, y ejercicios prácticos de completar el trinomio cuadrado perfecto como refuerzo. Para el desarrollo de las actividades utilizó el respectivo EDVI acompañado del cuestionario en medio físico, y el pizarrón.

3.3.6. Descripción de la sesión 6

En esta sesión participaron 11 estudiantes, pero debido a la inasistencia de algunos de ellos en la sesión anterior, se consideró pertinente por parte del maestro dar un repaso acerca de la interpretación de la ecuación canónica de la elipse y se realizaron ejercicios sobre completar el trinomio cuadrado perfecto, con el fin de reforzar las deficiencias cognoscitivas presentadas en el diagnóstico y así poder dar comienzo a la actividad 3B. Se usó el respectivo EDVI desarrollado en el software de geometría dinámica, y el pizarrón como herramientas de trabajo.

3.3.7. Descripción de la sesión 7

En esta sesión se desarrolló la actividad 3C, en la que participaron 11 estudiantes. Se usó el software de geometría dinámica Geogebra y el pizarrón, como herramientas de trabajo.

3.3.8. Descripción de la sesión 8

En esta sesión participaron 11 estudiantes, y se desarrolló la actividad final que consistió en aplicar un postest, con el fin de observar el rendimiento y evolución de los estudiantes sobre los conocimientos aprendidos en las actividades interactivas. Para el desarrollo de la postest los estudiantes hicieron uso del software de Geometría dinámica Geogebra y la calculadora. Participaron once estudiantes y el tiempo de trabajo fue de dos horas.

3.4. Análisis de los datos

La información fue recolectada a través de las guías de cada actividad en medio físico. El análisis de los instrumentos se realizó calificando los aciertos de los estudiantes en la postest para ver el desempeño respecto de las actividades y test diagnóstico. Al final se realiza una estadística para observar un panorama general de los resultados, y en algunos casos se describe el proceso desarrollado por algunos estudiantes en determinados ítems.

Para hacer referencia a los estudiantes, ellos se codificarán como E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10 y E11.

Capítulo IV. Análisis de resultados

En el presente capítulo se describen los resultados obtenidos en cada una de las etapas, así como algunas conclusiones a las que se pudieron llegar basándose en dichos resultados.

4.1. Resultados del test diagnóstico

El test diagnóstico se realizó con el objetivo de detectar las deficiencias de prerrequisitos en los estudiantes sobre conceptos de aritmética, geometría, lugar geométrico, trigonometría (semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras), ubicación de coordenadas en el plano cartesiano y álgebra (trinomio cuadrado perfecto), los cuales fueron necesarios para el desarrollo de la actividades y el postest. El análisis de resultados describe algunas respuestas y al final se realizó una estadística sobre los aciertos. A cada respuesta correcta se le asignó una puntuación de 1, mientras que a cada respuesta incorrecta se le asignó el valor de 0, sin embargo, para algunos reactivos se exponen las respuestas o procedimientos desarrollados por algunos estudiantes.

Los reactivos se dividieron en 5 bloques, cuyos resultados se presentan a continuación:

El bloque 1 presenta reactivos sobre conceptos de Geometría básica (ítem 1 y 3). El reactivo 1 se orientó a determinar si el estudiante interpreta gráficamente un segmento, respondiendo con un SÍ a los gráficos que lo son, y NO en caso contrario. Se registró que 3 de 10 estudiantes respondieron correctamente, mientras que los demás presentaron conceptos erróneos en la interpretación gráfica de un segmento; una interpretación errónea común de los estudiantes sobre cómo es un segmento gráficamente, es que lo asocian a cualquier gráfica que represente una línea recta.

El reactivo 3 se orientó a determinar si el estudiante identifica qué figuras representan un lugar geométrico en el plano, el cual necesario para comprender la condición de los puntos que conforman la elipse. Todas las figuras representan lugares geométricos y se observó que en su totalidad, los estudiantes no interpretan qué figuras lo son; algunos señalan que la elipse si es un lugar geométrico pero luego una parábola no, evidenciando que no tienen un concepto claro. En común, 4 de 10 estudiantes interpretaron que solo las figuras cerradas (triángulo, circunferencia, cuadrado, elipse y pentágono) representan lugares geométricos.

El bloque 2 presenta reactivos sobre conceptos de Trigonometría (ítem 2 y 4). El reactivo 2 se orientó a determinar si el estudiante conoce los criterios de semejanza de triángulos, y establece relaciones numéricas o algebraicas entre sus lados en caso afirmativo. Este concepto es necesario como apoyo en la demostración de la ecuación canónica de la elipse, mediante el uso de la construcción geométrica del círculo osculador. Se evidenció que 2 de 10 estudiantes respondieron acertadamente, pero sin expresar las proporciones que existen entre los lados del triángulo. En otros casos, 4 de 10 estudiantes, respondieron acertadamente pero sólo en los casos numéricos *a)* y *d)* del reactivo.

El reactivo 4 se orientó a determinar si el estudiante resuelve operaciones aritméticas y algebraicas relacionadas con el teorema de Pitágoras, necesarias para el cálculo de los parámetros a, b y c de la elipse propuesto en diversos ítems de las actividades y postest. Se evidenció que 5 de 10 estudiantes resuelven operaciones aritméticas aplicando el teorema de Pitágoras, resolvieron los problemas numéricos pero fallaron en los casos algebraicos.

El bloque 3 presenta un reactivo sobre el plano cartesiano (ítem 5). El reactivo 5 tuvo como objetivo explorar si los estudiantes son capaces de determinar la abscisa y la ordenada de puntos en el plano cartesiano, el cual es necesario para ubicar y determinar puntos como el centro, focos y vértices de la elipse. Se evidenció que 7 de 10 estudiantes determinó correctamente las coordenadas de cinco puntos cartesianos. Un error común encontrado en 2 de 10 estudiantes, fue en que confunden la ordenada y la abscisa, pues para el punto D, cuyas coordenadas son $(-2,0)$, lo determinan como $D(0,-2)$.

El bloque 4 sobre álgebra (ítem 6) se orientó a determinar si los estudiantes completan el trinomio cuadrado perfecto en una expresión algebraica, necesario para expresar la ecuación general de la elipse a su forma canónica. Se evidenció que los estudiantes no realizaron las operaciones de completar el trinomio cuadrado perfecto. Solo 2 de 10 estudiantes intentaron resolver el problema, interpretando el resultado como la solución de una ecuación cuadrática desarrollada por la fórmula general.

El test diagnóstico dio resultados que indican que los estudiantes presentan un nivel bajo-regular de conocimientos previos para las actividades y el postest. Se evidenció en los estudiantes un grado de dificultad en la parte algebraica, trigonométrica y geométrica, por lo que fue necesario considerar en el diseño de las actividades interactivas un repaso previo sobre los temas previos. La Figura 27 resume los resultados del test diagnóstico.

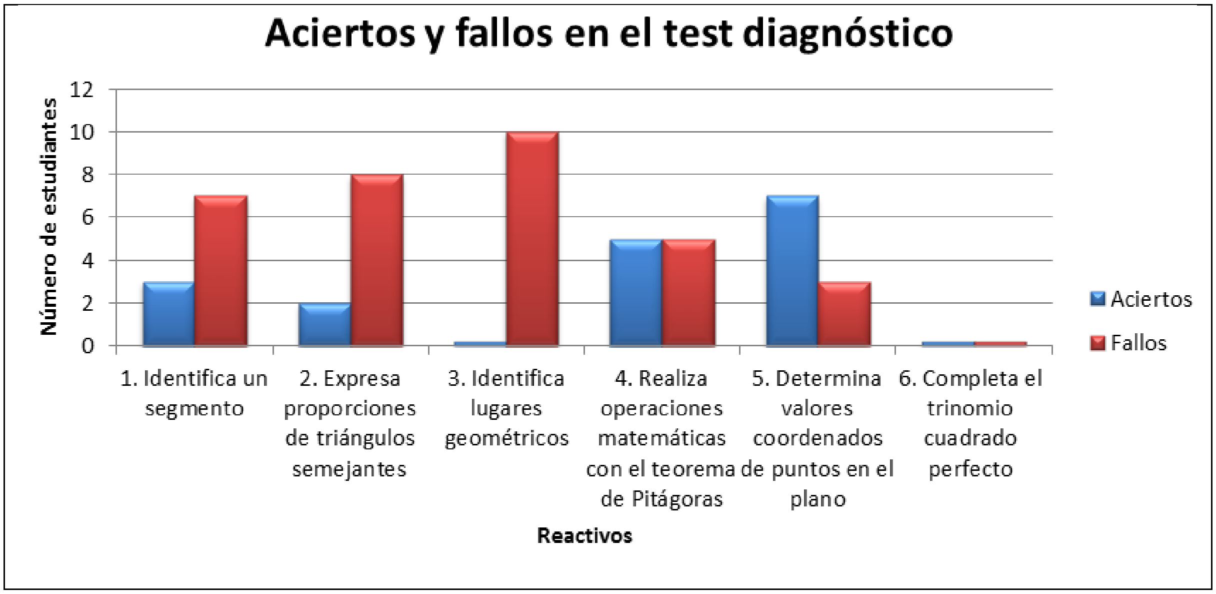


Figura 27. Resultados del test diagnóstico

4.2. Análisis de resultados de la actividad 1

La actividad 1 fue diseñada con el objetivo de introducir la definición de elipse como lugar geométrico e identificar los parámetros más relevantes y propiedades. La actividad se dividió en 4 sesiones, de las cuales se analizará los resultados de las sesiones 1, 3, y 4.

-En la sesión 1 se pretende que el estudiante construya la definición de la elipse como lugar geométrico a partir de una actividad en contexto y respondiendo a una serie de problemas dosificados como lo propone la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003). Se espera que el estudiante reconozca a partir de la gráfica trazada de la elipse, la condición de que la suma de sus radiovectores es igual a una constante equivalente a la longitud de la cuerda, lo cual caracteriza a la elipse como lugar geométrico.

Después de que cada estudiante interactuó con el EDVI-Jardinero, y respondió cada punto de la sesión 1 en el cuestionario, se evidenció que 8 de 9 estudiantes interpretaron e identificaron adecuadamente la condición de lugar geométrico de la elipse; sin embargo, lo hacen de una manera no formal, es decir, que no menciona elementos de la elipse como los son los radiovectores, sino que asocian éstos a medidas de objetos físicos como las magnitudes de los pedazos de cuerda. Esto es algo esperado puesto que la primera actividad está diseñada en un nivel I y II de Van Hiele, donde el estudiante apenas reconoce la curva y sus elementos, que en algunas ocasiones los compara o referencia a objetos físicos (radiovectores por cuerdas, focos por puntos o estacas). Unas de las respuestas del ítem 3 de los estudiantes al redactar la condición de lugar geométrico de la elipse fueron las siguientes:

Estudiante E1: "*la longitud de los pedazos de cuerda debe ser igual a 10 unidades*"

Estudiante E3: "que las cantidades son diferentes pero que al sumar den 10 o sea siempre constantes"

Para esta primera sección, un estudiante no respondió debido a su inasistencia. 1 de 11 estudiantes no interpretó la condición de lugar geométrico esperada a partir de la experiencia con el EDVI. Su respuesta fue la siguiente:

Estudiante E11: "que la longitud de la cuerda siempre sería 10 y que cuando una de la cuerdas aumente la otra disminuye proporcionalmente"

Lo anterior evidencia que la estudiante E11 comprende la condición de lugar geométrico de la elipse, pero no posee el vocabulario necesario, relacionando los cambios en las magnitudes de los pedazos de cuerda proporcionalmente, lo cual es una malinterpretación y no es acorde al objeto de estudio.

-En la sesión 3 se pretende que el estudiante explore la propiedad de simetría de la elipse y al final completar la redacción de la condición de lugar geométrico de la elipse de manera más formal.

Se evidenció que 8 de 11 estudiantes, identificaron la propiedad de simetría en la elipse mediante el doblado de una hoja con la curva elíptica calcada. Una de las respuestas de la sesión 3, sobre la interpretación de la simetría en la elipse, fue:

Estudiante E3: “*porque va pasando por los mismos puntos de intersección y son iguales en ambas partes*”. De nuevo un vocabulario inadecuado pero en entrevista personal si utiliza el concepto de simetría al hacer coincidir punto a punto una mitad de la elipse respecto de la otra.

Sin embargo sólo 3 de los 8 estudiantes que identificaron la propiedad de simetría en la elipse, lograron aplicarla para poder relacionarla con la definición de lugar geométrico de la de la misma, de modo que al final completaron una redacción más formal, como se puede apreciar en la Figura 28

$\overline{F'P} + \overline{FP} =$ constante=longitud de la cuerda

$\overline{F'P} + \overline{FP} = \overline{V'V}$

$\overline{F'P} + \overline{FP} =$ constante = longitud de eje mayor.

Figura 28. Definición formal de la elipse como lugar geométrico por una estudiante E3

Sólo 1 de 11 estudiantes no interpreta correctamente la propiedad de reflexión de la elipse, su respuesta fue la siguiente:

Estudiante E11: “*porque es la misma proporción de la figura*”.

Aquí, nuevamente la estudiante E11 utiliza de manera equivocada el concepto de proporcionalidad para justificar la simetría de la elipse, pero sí reconoce la propiedad.

-Por último en la sesión 4, todos los estudiantes comprendieron la relación pitagórica entre los parámetros a, b y c de la elipse, sin embargo, en los ejercicios propuestos 3 de 11 estudiantes no relacionaron correctamente algunos elementos de la elipse con dichos parámetros, es decir no asociaban que el valor del semieje mayor se le asigna al parámetro “*a*”, a pesar de tener claro el realizar operaciones con el teorema de Pitágoras.

La Figura 29, nos muestra el resumen de resultados de la actividad 1.

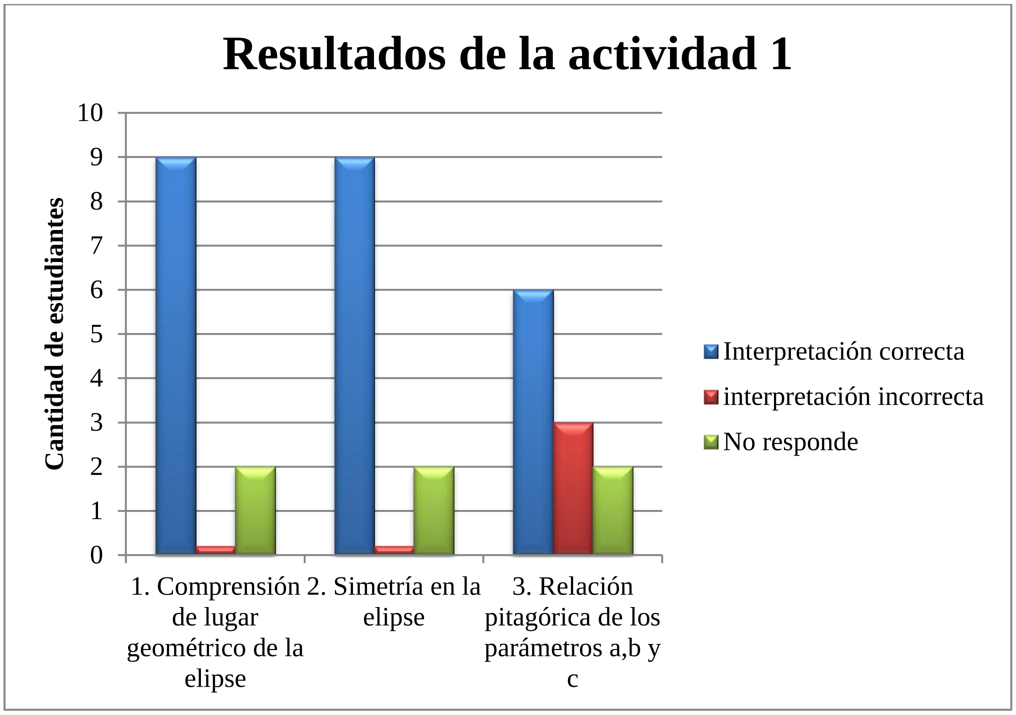


Figura 29. Resultados de la actividad 1

4.3. Análisis de resultados de la actividad 2

La actividad 2 fue diseñada con base en los conocimientos de un nivel II y III de Van Hiele. Como lo sugiere la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), el estudiante es quien debe construir el concepto matemático a partir de un problemas en contexto y ejercicios dosificados, por lo que en esta actividad se parte del movimiento planetario, y del trazo de elipse con el EDVI, de modo que el estudiante relacione el registro de representación numérico del valor de la excentricidad de la elipse con su respectivo registro de representación gráfico, diferenciando entre una elipse y otra por su grado de redondez.

Haciendo uso del concepto de excentricidad el estudiante puede realizar clasificaciones de elipses de acuerdo a su grado de redondez, e interpretar la circunferencia como un caso especial de la elipse. El realizar clasificaciones es una característica de un nivel III de Van Hiele.

La actividad 2 se divide en dos secciones:

-La primera sección consiste en que el estudiante a partir de la visualización, compare el grado de redondez entre las trayectorias planetarias de la Tierra y Marte, luego recolecte datos numéricos para armar un sistema de ecuaciones lineales que involucren como variables el semieje mayor y semi-distancia focal de las trayectorias elípticas, y finalmente calcular los respectivos valores de excentricidad.

Los resultados de la sesión 1, fueron los siguientes:

8 de 11 estudiantes realizaron operaciones algebraicas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Lo anterior implica que el estudiante recolectó datos, armó un sistema de ecuaciones lineales a partir del problema en contexto del movimiento planetario, y resolvió algebraicamente el sistema de ecuaciones lineales.

1 de 11 estudiantes no responde por inasistencia. 2 de 11 estudiantes no construyeron correctamente un sistema de ecuaciones lineales y tuvieron dificultad en su resolución, por lo tanto, no obtuvieron los valores de excentricidad para cada órbita elíptica planetaria.

-La sección 2 consiste en construir el concepto de excentricidad a través de la interacción con el EDVI-Excentricidad, y la resolución de problemas dosificados que promueven al estudiante a una mejor comprensión. Se observó que los estudiantes construyeron el trazo de varias elipses de diferentes distancias focales pero con una longitud constante del semieje mayor, en el respectivo EDVI.

De la experiencia de construir en el EDVI una elipse cuya distancia focal es cero, se obtuvo una circunferencia. 8 de 11 estudiantes para el ítem 11, clasificaron la circunferencia como un caso especial de la elipse, interpretándolo de diversas formas. Una de las justificaciones fueron:

Estudiante E6: "*c/a=0 se va haciendo más redonda al límite que parece una circunferencia*"

Estudiante E4: “Se obtiene una circunferencia como trazada con un compás”, refiriéndose a que la circunferencia se obtiene cuando una elipse tiene los focos uno encima del otro, lo que hacer ver el elipsógrafo (método del jardinero) como un compás.

El realizar clasificaciones de una curva le permite relacionar registros de representación (algebraico y numérico), al interpretar que la circunferencia es una elipse con una excentricidad igual a cero.

El ítem 12 consistía en comparar los valores numéricos de las excentricidades de la órbita elíptica de la Tierra con la de Marte, que fueron calculadas en la sección 1, y con base en dichos valores concluyeran cuál de las órbitas elípticas es la más redonda. Al final de la experiencia, 5 de 11 estudiantes aplicaron correctamente el concepto de excentricidad al establecer relaciones entre los registros de representación numérico y geométrico, es decir, que asociaron el valor numérico de las excentricidades calculadas de las órbitas elípticas, con su grado de redondez en un problema contextual real. Algunas de sus conclusiones fueron las siguientes:

Estudiante E2: “*La tierra porque tiene menor excentricidad la excentricidad de la tierra es 0.016 y la de marte 0.092 por lo tanto la tierra es más redonda*”.

Se puede observar que su respuesta es correcta, pero no formal. El estudiante asocia que para un valor de la excentricidad menor que otro, implica que la órbita elíptica es más redonda, sin embargo, su redacción al final da la impresión que se refiere a la redondez de la Tierra más no de su órbita elíptica, pero eso no le demerita que aplicó correctamente el concepto de excentricidad.

Estudiante E6: “*que mientras mayor excentricidad será más ovalada, que es este caso Marte, y la Tierra es más redonda*”, refiriéndose a la redondez de su órbita elíptica.

El caso contrario, 5 de 11 estudiantes aplicaron incorrectamente el concepto de excentricidad de la elipse. Una de las respuestas fue la siguente:

Estudiante E9: "*la tierra es mas larga y la de Marte es mas redonda porque la excentricidad es mayor que la tierra*". Se observa que el estudiante interpretó mal el concepto, pues a mayor excentricidad la órbita debería ser mas ovalada.

Solo un estudiante no respondió, debido a su inasistencia a la sesión.

La Figura 30, nos muestra el resumen de los resultados más relevantes de la actividad 2, de los cuales se puede concluir que la mayoría establecen correctamente relaciones entre registros de representación numérico con el algebraico, en el sentido que utilizan el valor numérico de la excentricidad para diferenciar entre dos elipse por su grado de redondez, y realizar clasificaciones.

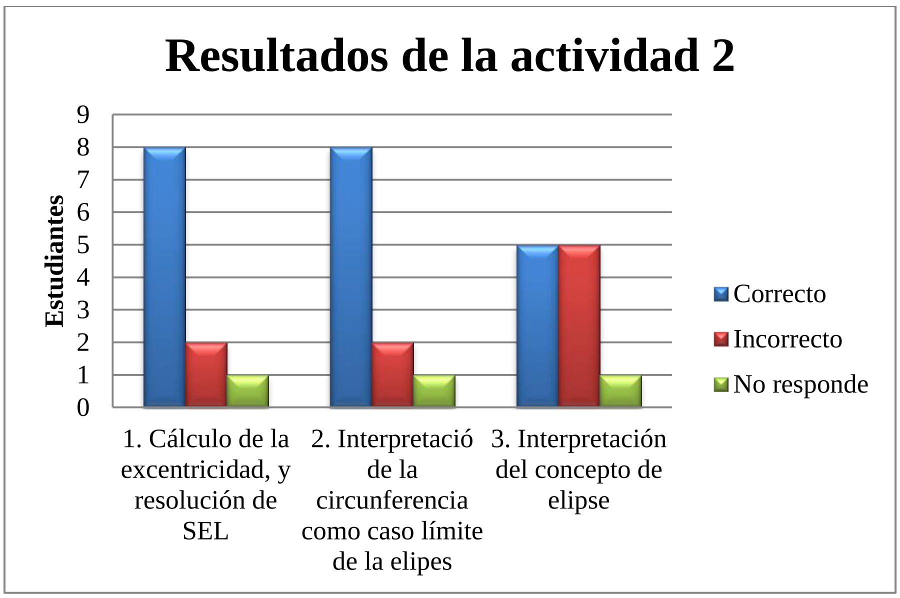


Figura 30. Resultados de la actividad 2

4.4. Análisis de resultados de la actividad 3

Esta actividad se dividió en tres sub-actividades: actividad 3A, actividad 3B, y actividad 3C.

Análisis de resultados de la actividad 3A

Esta actividad está compuesta por 2 secciones destinadas a trabajar con el modelo de la ecuación canónica de la elipse. En la primera sección los estudiantes interactuaron con el respectivo EDVI, realizando el trazo de la elipse por medio de la construcción geométrica del círculo osculador, de la cual identificaron los parámetro, a y b de la elipse.

En la sección 2, los estudiantes demostraron mediante el planteamiento de problemas dosificados y con ayuda del maestro, la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen. Por último se estudió en grupo, un ejercicio que consiste en hallar la ecuación canónica de la elipse, dados los parámetros de una elipse, y luego su ejercicio de operación inversa, que consiste en hallar los parámetros, coordenadas de los vértices y focos de una elipse, al ser dada su ecuación canónica. Este ejemplo de operación inversa fue una introducción para las dos actividades siguientes (3B y 3C), con el objetivo de plantear ejercicios para que el alumno resuelva de acuerdo con la didáctica Cuevas-Pluvinage (2003), que menciona que cada vez que se propongan problemas o ejercicios que apoyen la enseñanza de un determinado concepto matemático, en un determinado sistema o registro, se debe plantear actividades semejantes al mismo, en los diversos sistemas de representación que le sean propios, si la actividad lo permite.

Análisis de resultados de la actividad 3B

Esta actividad se divide en 4 secciones, y propone ejercicios dosificados de operación inversa, que relacionan los registros de representación geométrica al algebraico, y viceversa, para una elipse con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes coordenados.

-La primera sección consta de 4 ítems, que consiste en dados los parámetros a y b de la elipse, el estudiante debe hallar: 1) hallar la ecuación canónica de la elipse, 2) semi-distancia focal, haciendo uso del teorema de Pitágoras, 3) coordenadas de sus focos y vértices, 4) relacionar la ecuación con su gráfica la cual el estudiante debe graficar en el EDVI-Elipsógrafo.

Se observa de la Figura 31**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, que para el ítem 1, todos los estudiantes (11 de 11) obtuvieron la ecuación canónica de la elipse a partir de sus parámetros a y b.

Para el ítem 2, solo 9 de 11 estudiantes utilizaron el teorema de Pitágoras para calcular la semi-distancia focal de la elipse correspondiente, 2 de 11 estudiantes tuvieron errores en cuanto al mal despeje de la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$, utilizando $c^2 = a^2 + b^2$.

Para el ítem 3, se observa que 8 de 11 estudiantes hallaron correctamente las coordenadas para los focos y vértices. 2 de los 3 estudiantes que fallaron, fueron los mismos que calcularon erróneamente el valor de "c" en el ítem 2. Sólo 1 de los 3 estudiantes que falló, mostró confusión en el sentido que para los puntos coordenados, cambiaba el valor de la abscisa con la ordenada.

Para el ítem 4, se observa que 9 de 11 estudiantes relacionaron correctamente la ecuación canónica de la elipse con su respectiva ecuación. Los mismos 2 estudiantes que tuvieron inconvenientes para calcular "c" en el ítem 2, no obtuvieron la gráfica.

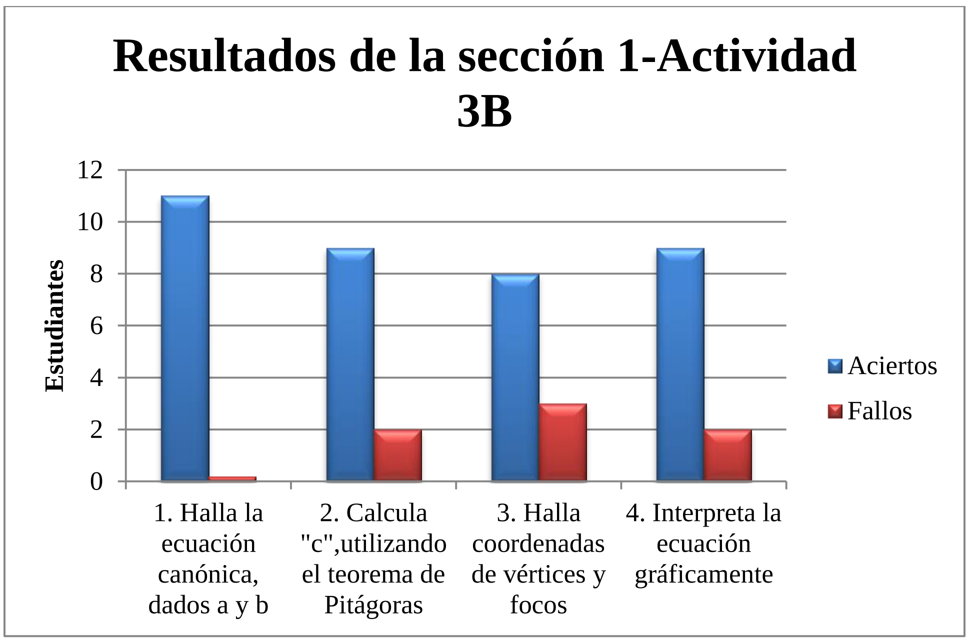


Figura 31. Resultados de la sección 1 de la actividad 3B

-La sesión 2 tenía como objetivo establecer registros de representación algebraico con el geométrico al relacionar la ecuación canónica de la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, con su forma geométrica, que es una elipse vertical (eje focal paralelo a la ordenada). Al final de la explicación los estudiantes graficaron una ecuación $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, utilizando el respectivo EDVI, lo que les permitió relacionar el modelo algebraico con la forma de la elipse.

-La sesión 3, estableció paralelamente el algoritmo algebraico de pasar de la ecuación canónica de la elipse a su ecuación general, y su operación inversa.

-La sesión 4, consta de 9 ítems, que consisten en lo siguiente:

- Del ítem 1 al 4, propone ejercicios de operación inversa a los ítems de la sesión 1. Los ejercicios consisten en dada una ecuación canónica, 1) Hallar los parámetros a y b. 2) Calcular el parámetro c, utilizando el teorema de Pitágoras. 3) Relacionar los registros de representación algebraico y geométrico, al describir la forma de la elipse, relacionada con su ecuación canónica. 4) Bosquejar la gráfica en Geogebra, a partir de su ecuación.

  Los resultados se resumen en la Figura 32

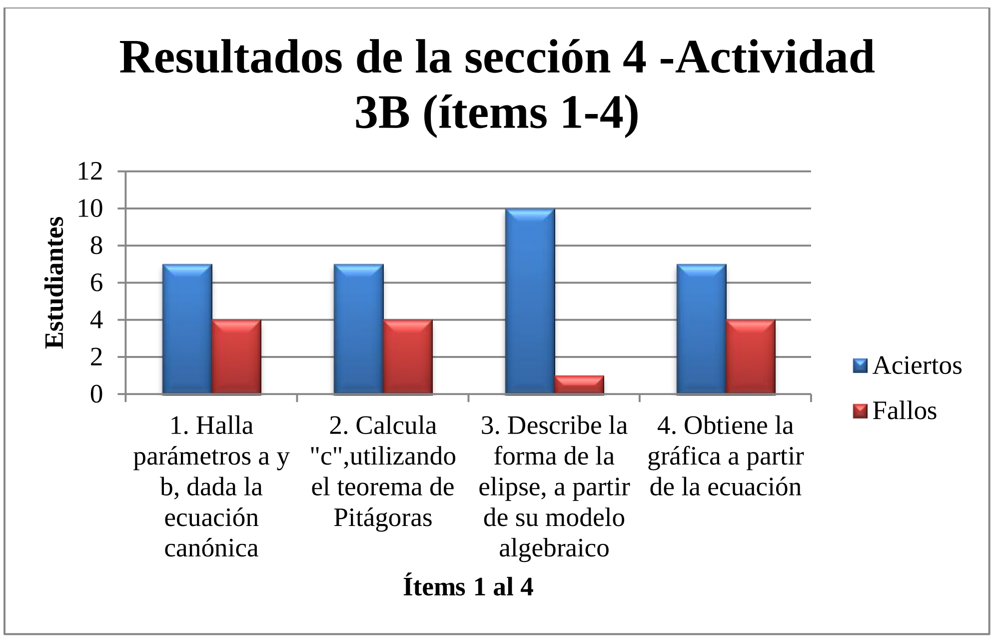


Figura 32. Resultados de la sección 4, de la actividad 3B (ítems 1 al 4)

Se observa para el ítem 1, que 7 de 11 estudiantes hallaron correctamente los parámetros a y b de la elipse, a partir de su ecuación canónica. De los 4 estudiantes que fallaron, tuvieron en común errores como cambiar el semieje mayor con el semieje menor.

Para el ítem 2, los mismos 7 estudiantes calcularon correctamente el valor de “c” utilizando el teorema de Pitágoras.

En el ítem 3, se observa que 10 estudiantes describen la forma de la elipse, sustentando que es vertical porque su modelo canónico es de la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, sin embargo, solo 7 estudiantes obtuvieron la gráfica con ayuda de Geogebra, y fueron los mismos que acertaron correctamente en el ítem 1.

Si comparamos los resultados de la los 4 primeros ítems de la sección 1, con los primeros de la sección 4, se puede decir que los estudiantes tienen más problemas al realizar la operación inversa de pasar de la ecuación a sus parámetros y por ende la gráfica.

- Los ítems 5 y 6, proponen ejercicios de operación inversa algebraicos, donde se pide correspondientemente hallar la ecuación general de la elipse a partir de su ecuación canónica, y hallar la ecuación canónica de la elipse a partir de su ecuación general, mediante procesos algebraicos, donde implica completar el trinomio cuadrado perfecto. Los resultados se muestran en la Figura 33:

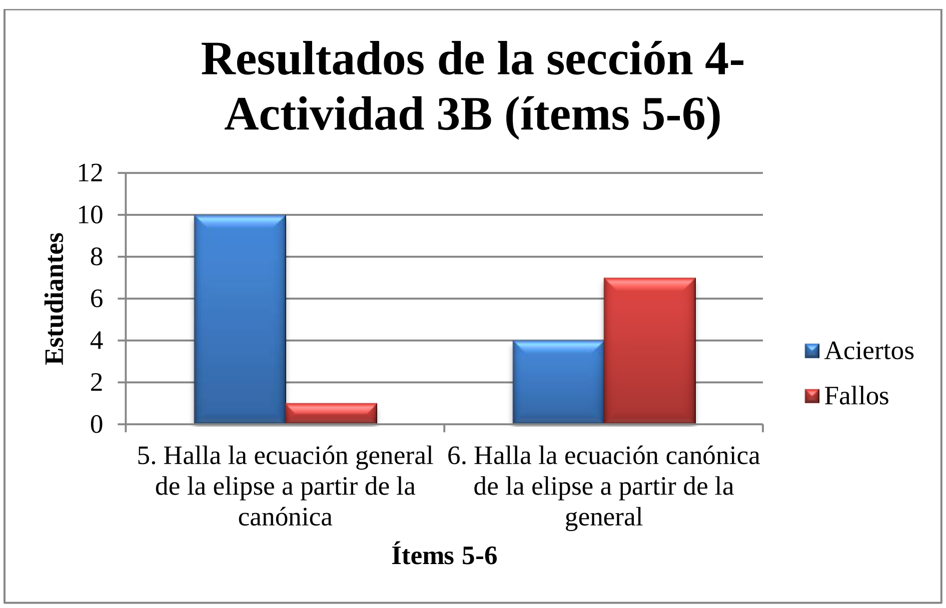


Figura 33. Resultados de la sección 4 de la actividad 3B (ítems 5-6)

En la Figura 33, se observa que 10 estudiantes realizan correctamente operaciones algebraicas para hallar la ecuación canónica a partir de la general, y 4 realizan correctamente la operación inversa, lo que muestra que aparentemente le es más complicado para los estudiantes hallar la ecuación canónica a partir de la general. La Figura 34 ilustra el proceso erróneo realizado por el estudiante E10, el cual es común en 8 estudiantes.

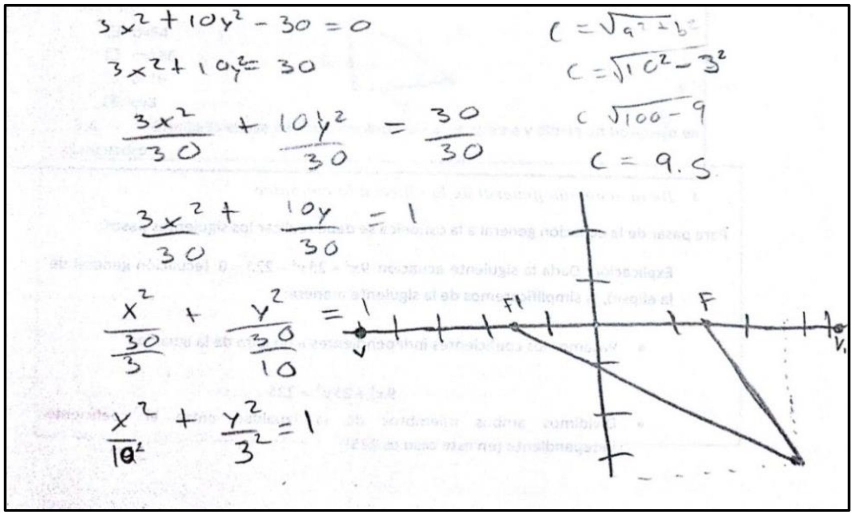


Figura 34. Operación errónea algebraica de la ecuación general de la elipse a la canónica.

Del proceso se puede decir que el estudiante concibe el parámetro a y b como si éstos debieran ser un número entero, y agregan un cuadrado a dichos parámetros, que cree que faltaría para igualar al modelo algebraico de la ecuación canónica de la elipse, obteniendo

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

Lo anterior conlleva a una errónea extracción de los parámetros a y b de la elipse.

- En los ítems 7 y 8, se pedían respectivamente hallar los parámetros a y b de ecuación canónica de la elipse obtenida en el ítem 6, por lo tanto se observó que los mismos 7 estudiantes que fallaron en el inciso 6, hallaron de manera incorrecta los parámetros a y b. Sin embargo 10 estudiantes describieron correctamente en el ítem 7 que la forma de la elipse es horizontal, pues a pesar de que 8 de ellos hallaron incorrectamente la ecuación canónica de la forma $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$, al compararla con el modelo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ les permitió describirla de manera correcta.

Lo anterior comprueba que a los estudiantes se les dificulta más hallar los parámetros de la elipse y su gráfica a partir de su modelo algebraico.

- El ítem 9, consiste en obtener la gráfica a partir de la ecuación canónica del ítem 6 (relaciona el registro de representación algebraico con el geométrico). Solo 2 de 11 estudiantes, bosquejaron correctamente la curva elíptica con ayuda del EDVI.

Análisis de resultados de la actividad 3C

La actividad 3C, propone una serie de ejercicios dosificados, de operación inversa y que relacionen los diversos registros de representación semiótica como lo sugiere la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003). La actividad se divide en cuatro secciones, que son:

- Sección 1: Estudio de la ecuación canónica de la elipse con centro (h,k), la cual se obtiene de la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen, al aplicar la traslación de ejes. El estudio de estas ecuaciones se hace con ayuda del maestro.
- Sección 2: Consta de 4 ítems, cuyo objetivo es que el estudiante relacione el registro de representación geométrico con el algebraico, al obtener la ecuación canónica de la elipse con centro (h,k), y sus elementos a partir de su gráfica. Los ítems consisten en: 1) Calcular el centro a partir de la gráfica o utilizando la fórmula de punto medio. 2) Calcular el semieje mayor y semi-distancia focal a partir de la gráfica, o utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos. 3) Utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el parámetro b, teniendo a y c. 4) Hallar la ecuación canónica de la elipse con centro (h,k), a partir de su gráfica inicial.

Los resultados de la sección 2, se ilustran en la Figura 35 donde los ítem 1,2 y 3 se resumirán en uno mismo como en halla los elementos (coordenadas del centro) y parámetros de la elipse a partir de su gráfica. Se observa que 10 de 11 estudiantes, hallaron elementos y parámetros de la elipse correctamente, sin embargo solo 8 estudiantes obtuvieron la ecuación canónica correctamente. A continuación se exponen dos errores comunes, tomando como referencia a los estudiantes E10 y E11.

Estudiante E10: Se equivoca en la ley de signos, al sustituir el valor del centro $(-5,2)$, y semieje mayor igual a 5 unidades, y semieje menor de 3 unidades, en el modelo $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, expresándolo $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$.

Estudiante E11: Su resultado fue $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$, lo que indica que confunde el modelo de ecuación canónica horizontal con el vertical.

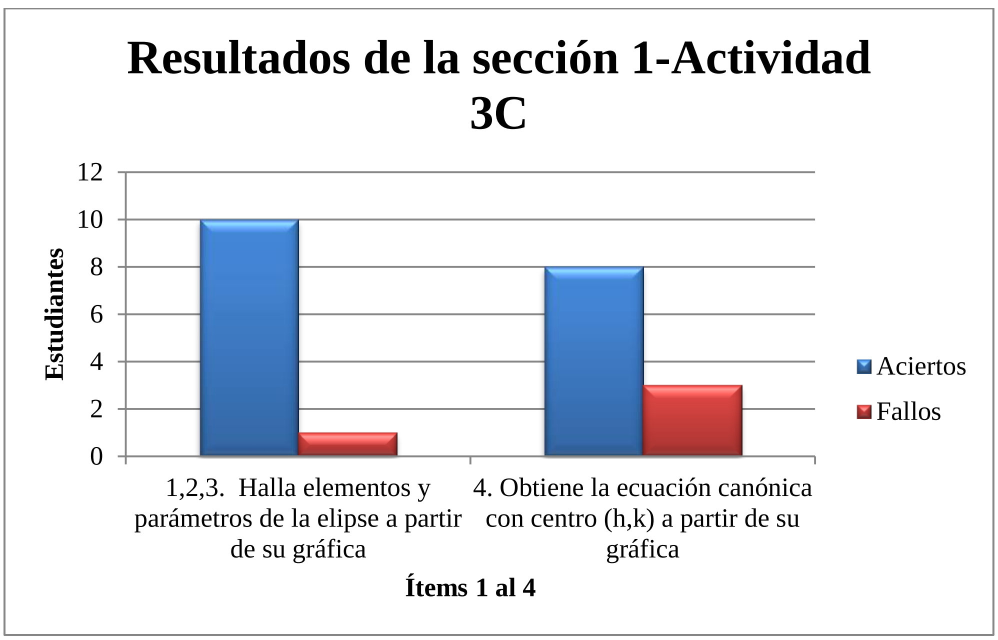


Figura 35. Resultados de la sección 1-Actividad 3C

- Sección 3: en esta sección el estudiante participa con el maestro sobre los procesos algebraicos de operación inversa, al pasar de la ecuación canónica de la elipse con centro (h,k), a su ecuación general, y viceversa. Al final de la explicación los estudiantes describen las características que debe tener una ecuación general para que modele una elipse.

- Sección 4: Esta sección plantea un ejercicio de operación inversa, respecto del ejercicio de la sección 1. Consta de 5 ítems, cuyo objetivo es que el estudiante relacione el registro de representación algebraico con el geométrico, al obtener la gráfica de la elipse, a partir de su ecuación canónica con centro (h,k). Los ítems consisten en: 1) Describir la gráfica según el modelo algebraico. 2) Obtiene los parámetros a partir de su ecuación. 3) Halla las coordenadas del centro a partir de su ecuación 4) Determina las coordenadas de los focos y vértices. 5) Obtiene la gráfica a partir de su ecuación con ayuda de Geogebra.

Los resultados de la sección 4, se ilustran en la Figura 36 donde los ítem 2, 3 y 4 se resumirán como hallan los elementos (coordenadas del centro), parámetros de la elipse y coordenadas de focos y vértices a partir de su ecuación.

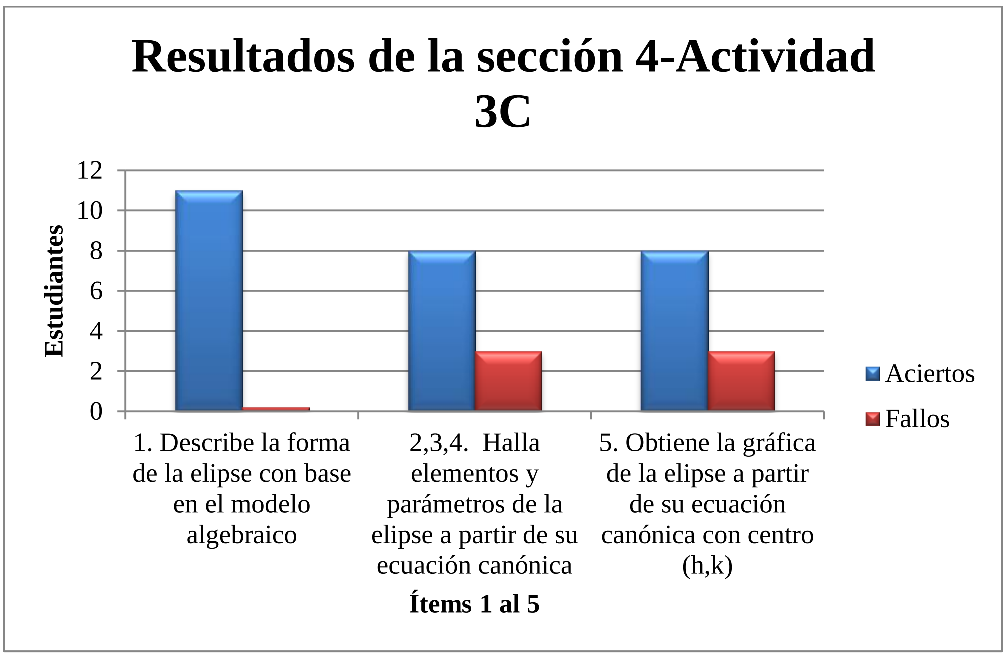


Figura 36. Resultados de la sección 4-Actividad 3C (ítems 1 al 5)

Se observa en la Figura 36, para el ítem 1, que 11 de 11 estudiantes asocian correctamente el modelo de ecuación canónica con la forma de la elipse. Para el ítem 2, 3 y 4, se observa que 8 estudiantes hallan los elementos y parámetros de la elipse a partir de la ecuación, y de igual manera los mismos estudiantes obtuvieron su gráfica con ayuda del EDVI-Elipsógrafo.

De la actividad 3B, se concluyó que resulta más complicado a los estudiantes obtener los parámetros y gráfica de la elipse a partir de la ecuación. Sin embargo en la actividad 3C se puede concluir que hubo algo de mejoría. Por otra parte, según los resultados es notable que son más los estudiantes que obtienen los parámetros de la elipse a partir de la gráfica, que de su ecuación.

4.5. Análisis de resultados del postest

Con el análisis del postest se pretende observar el rendimiento de los estudiantes que obtuvieron después del desarrollo de las actividades. El postest presenta 15 incisos que giran en torno a dos situaciones en contexto. Del ítem 1 a la 14 se pretende trabajar los dos problemas fundamentales de la Geometría analítica como ejercicios de operación inversa, de los cuales del ítem 1 al 5 se parte de la gráfica de la elipse para la obtención de los parámetros y así llegar a la ecuación canónica, y del ítem 7 al 12 se parte de la ecuación general de la elipse para llegar a la canónica, y de allí extraer los parámetros para graficarla.

En los ítems 6 y 13, el estudiante debe calcular la excentricidad para las dos elipse planteadas en el problema, y se pretende que para el ítem 14, el estudiante aplique el concepto de excentricidad visto en las actividades para diferenciar entre dichas elipses por su grado de redondez.

En el ítem 15 se pretende que el estudiante aplique el concepto visto en la actividad 1 de lugar geométrico de una elipse, en situaciones en contexto.

Resultado ítem 15. Definición de la elipse como lugar geométrico

El ítem 15 plantea una situación real, donde el estudiante debe aplicar la definición de la elipse como lugar geométrico para poder resolver la situación planteada. Este ítem tenía como objetivo determinar el avance que los estudiantes tuvieron respecto a la interpretación de la elipse como lugar geométrico. Los resultados se comparan con el ítem 3 de la prueba diagnóstico y el ítem 3 de la sesión 1 en la actividad 1. Los resultados comparados con el diagnóstico y las actividades se puede observar en la Figura 37.

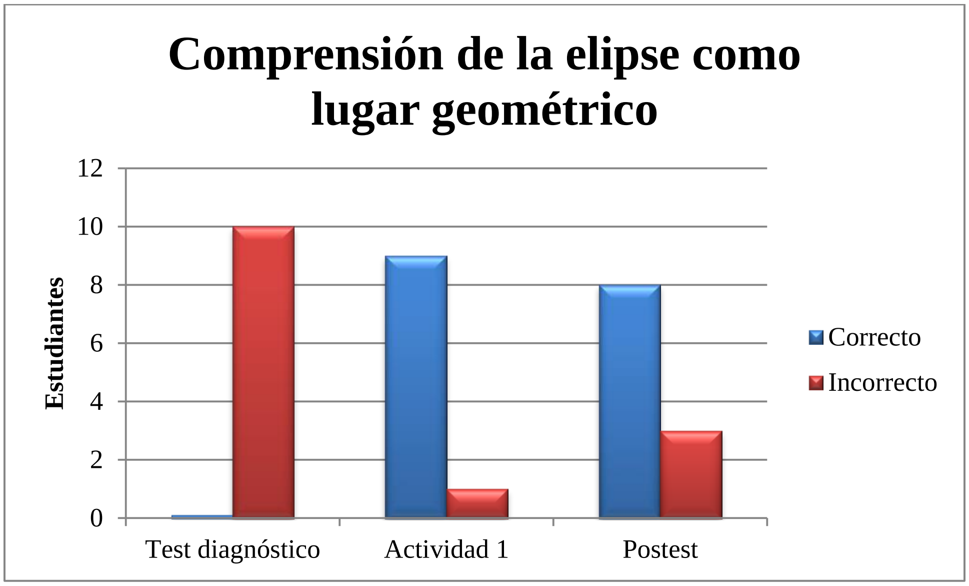


Figura 37. Resultados finales sobre la comprensión de la elipse como lugar geométrico

Como se puede observar en la figura, los estudiantes muestran un mejor desempeño en los resultados. Se observa que en la actividad solo 1 estudiante redactó incorrectamente la definición de la elipse como lugar geométrico, sin embargo en la evaluación hubo un avance por parte de éste. La razón por la cual en el postest 2 estudiantes respondieron de manera incorrecta, se debe a su inasistencia en la sesión que se realizó la actividad 1. Algunas respuestas correctas en el postest fueron:

Estudiante E1: "Gina, porque es una elipse y en cualquier punto es igual a la suma de un punto a sus focos"

Estudiante E3: "La razón la tiene Gina porque recorrieron la misma distancia desde diferentes puntos y la distancia a los focos al sumarlos dan el mismo resultado"

Estudiante E5: "Gina tiene la razón porque siempre va a ser la misma distancia de donde parta Gina a otro jugador y la cuerda mide lo mismo". La respuesta del estudiante E5, evidencia interpreta la definición bajo el modelo físico material (método del jardinero)

Una de las respuestas erróneas se muestra en la Figura 38, donde el estudiante E10 trata de medir las distancias de manera no proporcional por medio de rayitas, concluyendo que las éstas son desiguales, por lo tanto, contradice la definición de la elipse como lugar geométrico.

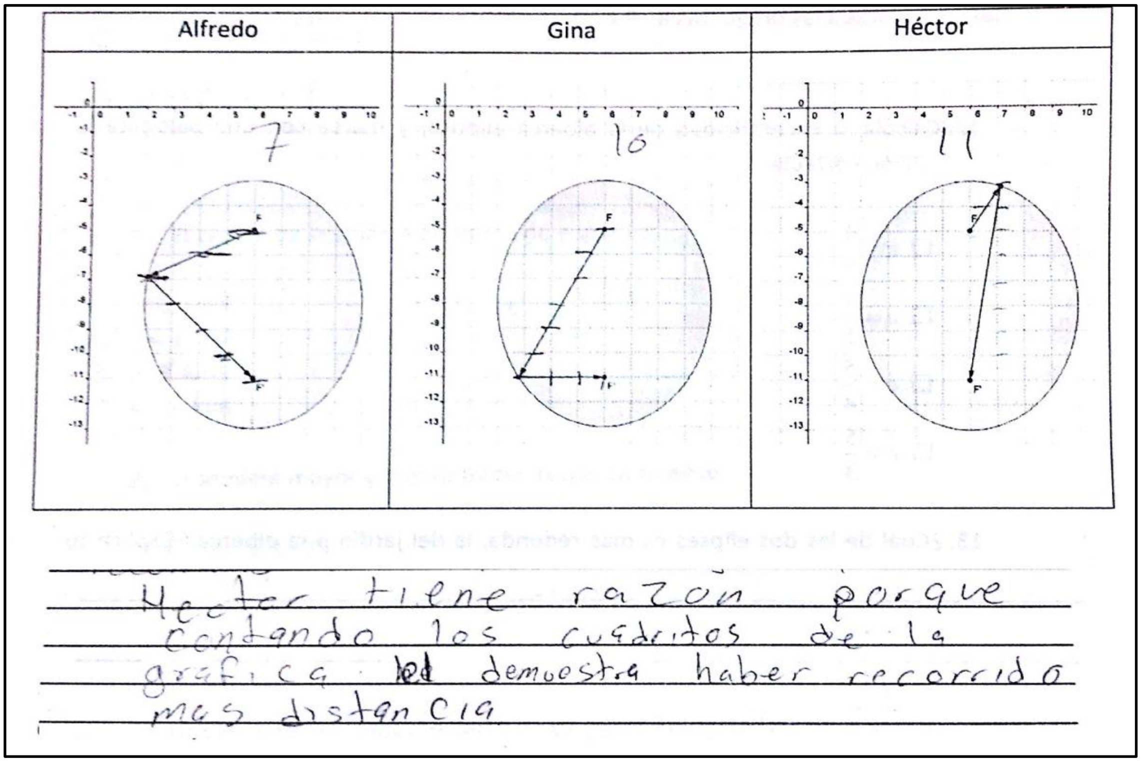


Figura 38. Interpretación errónea sobre la elipse como lugar geométrico

Resultados ítem 6, 13,14: Cálculo y concepto de excentricidad.

Estos 3 reactivos nos permiten determinar el avance que los estudiantes tuvieron en el cálculo de la excentricidad y la interpretación de su valor numérico. Esto implica que los estudiantes relacionan el registro de representación numérico con el geométrico.

Específicamente los estudiantes debieron calcular el valor de la excentricidad para dos elipses propuestas en un comienzo del postest, y luego determinar cuál de ellas es más redonda de acuerdo al valor de su excentricidad. La Figura 39 muestra los resultados del ítem 14, sobre el avance de los estudiantes sobre la interpretación de excentricidad.

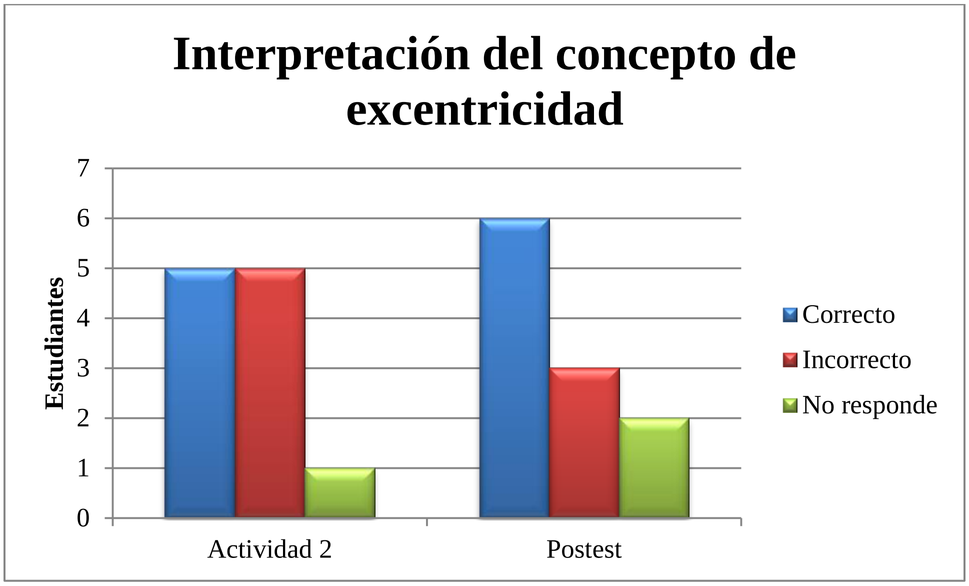


Figura 39. Interpretación final sobre el concepto de excentricidad

Se observa que 6 de 11 estudiantes comprendieron el concepto de excentricidad al relacionar los registros de representación numérica (valor de la excentricidad) con el geométrico (redondez de la elipse), y hubo un mejor desempeño en el postest, al menos en un estudiante. Respecto a los dos estudiantes que no respondieron correctamente, expresaron que fue porque no se acordaron de la fórmula. En los casos incorrectos, los estudiantes daban su opinión sobre el grado de redondez de una elipse, basado en la observación y descripción física de las curvas, más no asociando el registro de representación numérico con el geométrico.

Ítems del 1 al 5. Registros de representación geométrico al algebraico

En esta parte se pretende que el estudiante establezca relaciones entre el registro de representación geométrico con el algebraico, de modo que se parte de la gráfica de una elipse para extraer sus parámetros, y finalmente llegar al modelo de ecuación algebraica (ecuación canónica). Los resultados de los ítems se resumen en dos logros, como se observa en la Figura 40.

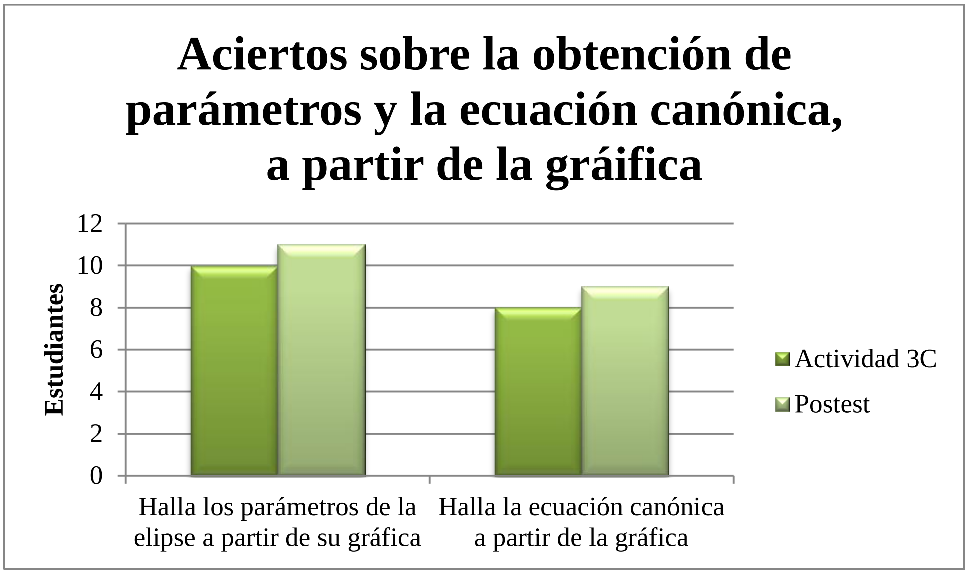


Figura 40. Obtienen la ecuación canónica a partir de la gráfica.

Se observa que hubo un mejor desempeño en el postest al menos en un estudiante. 9 de 11 estudiantes comprenden la relación que existe entre la gráfica con respectiva ecuación canónica, al extraer los parámetros de la elipse. A pesar que en el postest todos los estudiantes extraen de manera correcta los parámetros de la elipse y las coordenadas de su centro, ésto no es suficiente para llegar al modelo algebraico al menos para 2 estudiantes. Los errores detectados son de tipo operativo y de confusión con el modelo algebraico, los cuales se describen a continuación para dos estudiantes:

-El estudiante E10, comprende que la elipse del jardín se modela con la ecuación canónica $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Sin embargo al sustituir los valores de $h=-12, k=8$, $a=10, b=6$, en dicho modelo algebraico, éste lo expresa como $\frac{(x-12)^2}{100}+\frac{(y+8)^2}{36}=1$, equivocándose en la ley de los signos.

-El estudiante E11, aplica el modelo de ecuación $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ (elipse vertical) para una elipse que se modela con la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (elipse horizontal).

Ítems del 7 al 12. Registros de representación algebraico al geométrico

En esta parte se pretende que el estudiante realice la operación inversa a los ítems 1 al 5, estableciendo relaciones entre el registro de representación algebraico con el geométrico. El estudiante debe hallar la ecuación canónica de la elipse a partir de su general (operación inversa algebraica) y a partir de la ecuación canónica obtenida, interpretar su gráfica. Los resultados se observan Figura 41.

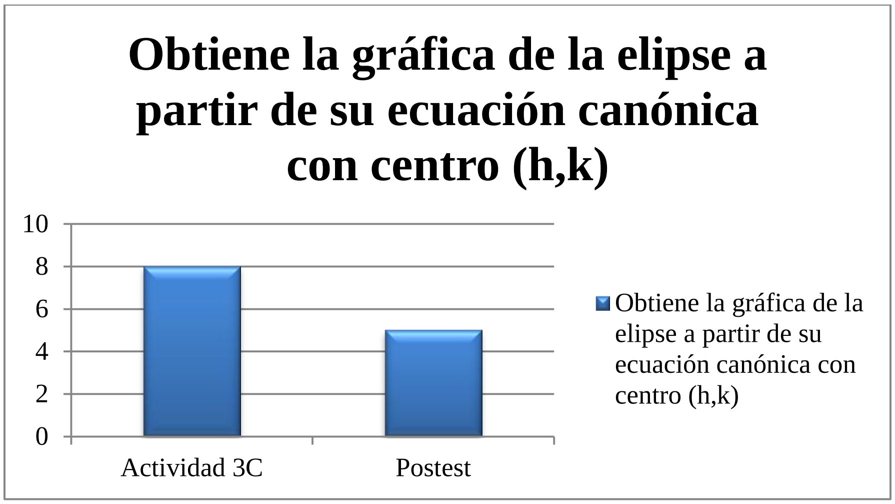


Figura 41. Resultados finales sobre la obtención de la gráfica a partir de su ecuación

Se observa que el desempeño en el postest bajó en tres estudiantes respecto de las actividades, debido a que se detectaron problemas algebraicos al desarrollar la fracción algebraica para pasar de la ecuación general de la elipse a la ecuación canónica, y como consecuencia no se obtuvieron los parámetros correctos de la elipse.

En el test diagnóstico se observó que solo 5 estudiantes realizaban correctamente operaciones con el teorema de Pitágoras, caso que para el postest todos los estudiantes lo utilizaron correctamente. También se observó que en el test diagnóstico, ningún estudiante completó el trinomio cuadrado perfecto para una ecuación cuadrática, sin embargo el desempeño para el postest fue mucho mejor, en el cual, 9 de 11 estudiantes mostraron habilidades algebraicas al completar el trinomio cuadrado perfecto, en el proceso de pasar de la ecuación general del a elipse a su ecuación canónica, pero sólo 5 de ellos llegaron con éxito a obtenerla.

El desempeño de los estudiantes en la evaluación respecto las actividades se resumen así:

- 8 de 11 estudiantes aplicaron correctamente la definición de la elipse como lugar geométrico interiorizada en la actividad 1, para interpretar una situación real en contexto. Los estudiantes perciben las componentes y propiedades de la elipse a partir de la observación como de la experimentación en EDVI, estableciendo relaciones entre el registro de representación geométrico con el algebraico. Además, construyeron la definición de la elipse como lugar geométrico, pero su redacción no es formal.
- 6 de 11 estudiantes aplicaron correctamente el concepto de excentricidad de la elipse en una situación en contexto. El concepto fue adquirido a través de la experimentación con el EDVI, para diferenciar entre una elipse y otra debido a su forma, lo cual les permitió establecer relaciones entre registros de representación numérica con el geométrico.
- 9 de 11 estudiantes establecen relaciones entre los registros de representación gráfica con el algebraico, al hallar la ecuación canónica de la elipse a partir de su gráfica. Sin embargo se evidencia en 6 de 11 estudiantes, presentan deficiencias en los problemas de operación inversa en los que se parte de la ecuación general de la elipse para determinar su gráfica. Sin embargo estas dificultades se deben a ciertos problemas algebraicos más no de la interpretación de la ecuación.
- Se observó que a los estudiantes les resulta más complicado pasar de un registro de representación algebraico al gráfico, debido a errores algebraicos.

Capítulo V. Conclusiones e investigaciones futuras

5.1. Conclusiones

En el proceso de investigación se implementó una serie de actividades bajo un marco didáctico e integradas con el uso de la tecnología, como propuesta para la enseñanza de las cónicas. Con el diseño de estas actividades se buscaba que hubiese un equilibrio entre parte geométrica con la algebraica en la enseñanza de la elipse. El desarrollo de las actividades ha servido como base para responder al planteamiento realizado en la pregunta de investigación:

> *¿Cómo introducir una curva cónica mediante el empleo de la tecnología digital, dentro de un marco didáctico para promover una mejor comprensión?*

Teniendo en cuenta los resultados del test diagnóstico y postest se evidenció que introducir una cónica mediante el uso de los EDVI’s con un software de geometría dinámica, sirvió de apoyo en la enseñanza del tema de la elipse y su comprensión como lugar geométrico, sus elementos y propiedades, gracias a que el uso de la tecnología permitió visualizar los objetos geométricos. Sin embargo el uso de la tecnología digital debe ir acompañada de un diseño de actividades bajo un marco didáctico para lograr encaminar a los estudiantes a construir las diferentes definiciones matemáticas. El uso de los EDVI´s permitió una mejor comprensión de la curva cónica elipse desde un punto de vista más geométrico, equilibrada con su parte algebraica.

El uso de la tecnología permitió adoptar una actitud activa a los estudiantes, quienes a través del uso de los EDVI´s realizaban siempre la acción como lo propone la didáctica Cuevas y Pluvinage (2003) lo cual promueve comprender las diferentes definiciones de una forma interactiva y dinámica, a diferencia de la verbal como se analizó en los cursos de enseñanza tradicional. El desarrollar la acción e interiorizarla es decir llevarla al pensamiento una vez hecha, permitió que los estudiantes crearan su propio conocimiento a partir de ejercicios dosificados, así como comprender el concepto de lugar geométrico de la elipse para aplicarlo en contextos reales y dar explicación a determinadas situaciones; por dicha razón en el sentido de Ausubel, Novak & Hanesian (1978) el aprendizaje fue significativo en la mayoría de los estudiantes, debido a que en el postest 8 de 11 estudiantes aplicaron el concepto de lugar geométrico de la elipse adquirido en las actividades, en una situación real dando solución a un problema de interpretación. La inclusión de un problema en contexto desde un comienzo de cada actividad como lo propone la didáctica Cuevas y Pluvinage, fue un elemento motivante para los estudiantes, a quienes les resultó significativo aprender definiciones de la elipse aplicados en la vida cotidiana, y cómo a partir de la matemática se le puede dar sentido a situaciones reales. La construcción de las definiciones del objeto estudio (elipse) a partir de contextos reales, mostró en los resultados que ayuda a mejorar la parte conceptual en los estudiantes lo cual es una deficiencia en la enseñanza tradicional, donde el estudiante suele aprender de memoria los conceptos y produce la creencia en los estudiantes de que la Matemáticas trata de resolver problemas operativos y sin relación o sentido en la vida cotidiana.

En los EDVI´s los estudiantes recrearon el movimiento de los objetos geométricos lo cual permitió que interactuaran a través de ellos modificando parámetros en este caso de la elipse, y visualizar los cambios en la figura al hacer dichas modificaciones. En efecto, los estudiantes lograron comprender el concepto de excentricidad de la elipse relacionando la parte numérica (valores de los parámetros de la elipse) con la parte gráfica, es decir con el uso de la tecnología los estudiantes (más del 50%) relacionaron los diferentes registros de representación como el numérico y el geométrico. Se observó en el análisis de resultados un rendimiento en el postest, en la cual 6 de 11 estudiantes aplicaron correctamente el concepto de excentricidad de la elipse en una situación en contexto, el cual fue adquirido a través de la experimentación con el EDVI, para diferenciar entre una elipse y otra debido a su forma, lo cual es una característica del nivel III de Van Hiele, donde los estudiantes establecen relaciones entre propiedades y características de la elipse respecto de su forma. La experimentación con los EDVI´s permitió a los estudiantes explorar propiedades y características de los objetos geométricos (la elipse para este caso en particular), sin embargo el uso del software de Geometría dinámica no es suficiente para conectar al estudiante con el conocimiento, y es aquí donde la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) jugó un papel muy importante en encaminar al estudiante hacia el entendimiento del concepto de elipse por medio de incisos o ejercicios dosificados.

Con el uso de software de geometría dinámica se puede sustituir la construcción de objetos físicos por medio de la construcción de escenarios interactivos para simular el funcionamiento de objetos físicos y además ofrece herramientas de medición, como la distancia entre dos puntos, o la magnitud de un segmento, todo esto resultó muy atractivo para los estudiantes como la simulación del movimiento planetario que se usó para introducir el concepto de excentricidad.

Los niveles de Van Hiele que por los mismos autores (Dina y Pierre Van Hiele) fueron propuestos para una Geometría sintética, se pudieron extrapolar a la Geometría Analítica, adaptándose en el marco didáctico Cuevas & Pluvinage (2003) para el tema de las cónicas, particularmente en la elipse, lo cual permitió diseñar las diferentes actividades para la enseñanza de dicha cónica de modo jerarquizado (por niveles), que facilitó a los estudiante la comprensión de las diferentes definiciones de la elipse, partiendo de la visualización y conocimientos de las propiedades del objeto geométrico sin una prematurización de la parte analítica (algebraica). Los niveles de Van Hiele encajan con la didáctica Cuevas & Pluvinage en la medida de que en cada nivel se plantea dosificar por medio de ejercicios adecuados los conceptos del objeto geométrico a enseñar.

En el test diagnóstico se pudo detectar deficiencias en todos los estudiantes en el desarrollo de operaciones algebraicas como completar el trinomio cuadrado perfecto, y respecto al postest se evidencio una evolución positiva de las mismas. En las actividades los estudiantes mostraron un buen desempeño en desarrollar operaciones algebraicas de manera guiada, sin embargo algunos estudiantes al no ser guiados en el postest, presentaron dificultades algebraicas, especialmente en ejercicios de operación inversa, donde se observó que a los estudiantes les resulta más complicado pasar de un registro de representación algebraico al gráfico, debido a errores algebraicos en los cuales a partir de la ecuación general de la elipse se extraen los parámetros para posteriormente interpretarla gráficamente. A pesar de las dificultades algebraicas la mayoría de estudiantes comprendieron la elipse como ecuación, relacionando el registro de representación algebraico con el geométrico.

Adicionalmente, los modelos algebraicos como la ecuación canónica de la elipse causan dificultades en la interpretación del modelo general respecto del modelo particular, surgidos de una interpretación algebraica, es decir los estudiantes siempre comparaban su respuesta obtenida de un caso particular para una elipse con el modelo algebraico o ecuación canónica, lo que les causa confusión, por lo tanto no es recomendable en la enseñanza de las cónicas partir de demostraciones generales para luego incidir en las particulares, porque la parte analítica se convierte en sustitución de valores numéricos dejando a un lado lo esencial que es en sí la figura objeto.

La mayoría de los estudiantes aplican los conceptos (en este caso de la elipse) a situaciones reales, evocando las definiciones aunque de manera no formal, es decir utilizan un lenguaje coloquial o no matemático. Esto concuerda con el diseño de actividades, debido a que un lenguaje formal se adquiere con la evolución del pensamiento en los estudiantes, siendo mejor a partir de un nivel IV de Van Hiele.

En la didáctica Cuevas y Pluvinage se plantea el principio de mínima ayuda, en la cual se debe guiar al estudiante brindándole las herramientas necesarias para construir un concepto matemático, de modo que el maestro intervenga lo menos posible en el desarrollo de la tema, permitiendo que el mismo estudiante realice las actividades y vaya construyendo las distintas definiciones del objeto matemático en estudio. Una manera de lograrlo fue a través de las instrucciones y preguntas guiadas en los cuestionarios de las actividades didácticas, y a pesar de que funciona esta estrategia, se requiere de la redacción de instrucciones extensas en las actividades, lo cual resultó tedioso para el estudiante mantener un ritmo constante de lectura.

El diseño de las actividades realizadas, las cuales fueron enmarcadas en la didáctica Cuevas y Pluvinage y el uso de la tecnología, son una muestra de la enseñanza de la elipse la cual se puede aplicar para la enseñanza de las cónicas en general. Sin embargo no es una tarea sencilla para el docente, debido a la exigencia al maestro de saberes en cuanto a la didáctica y el uso de la herramienta tecnológica, por lo tanto el maestro deberá capacitarse en un tiempo considerable, para lograr elaborar un plan de trabajo que permita el desarrollo de las actividades encaminadas a la enseñanza de los conceptos de las cónicas que se ajuste a lo establecido en los programas curriculares. Otra exigencia de la enseñanza de las matemáticas haciendo uso de la tecnología es poder contar con la cantidad de equipos de cómputo suficiente y en buen estado para cada estudiante en el aula, sin embargo en esta época donde la tecnología avanza día a día y se hace más asequible, es recomendable en mi opinión aprovechar las ventajas que nos ofrecen dichas herramientas computacionales, para promover una mejor comprensión de las matemáticas, siempre y cuando se acompañe de una didáctica.

5.2. Investigaciones Futuras

El presente apartado pretende establecer algunas de las posibles líneas de investigación que pueden dar continuidad al presente trabajo, teniendo en cuenta las características de hacer uso de la tecnología y la didáctica para la enseñanza de conceptos matemáticos.

Al revisar los resultados obtenidos en esta investigación se presentaron avances en el aprendizaje significativo del concepto de elipse, en los que se aplicaron los escenarios interactivos en Geogebra, apoyados en el marco de la didáctica Cuevas & Pluvinage. En términos generales, la investigación futura estará centrada en diseñar nuevos proyectos de acción práctica sustentados en el marco didáctico Cuevas & Pluvinage en las que se propondrán situaciones problémicas basadas en un contexto real de fenómenos físicos de la mecánica clásica para introducir conceptos de Cálculo como la derivada. De igual manera, estas nuevas actividades se apoyaran de un fuerte uso de herramientas digitales como Geogebra, en el cual se pueden simular fenómenos físicos, construidos con las diferentes herramientas y los objetos geométricos que ofrece el programa, así como en el presente trabajo se realizó la simulación del movimiento de traslación planetario de la Tierra y Marte, que se utilizó para introducir el concepto de excentricidad de la elipse.

Desde el punto de vista histórico, la introducción de conceptos matemáticos como la derivada surgió a partir de fenómenos físicos como el movimiento rectilíneo uniforme y acelerado de una partícula, estudiado por Isaac Newton (Waldegg, 2000), y como Galileo a partir de la experimentación "demostró que un cuerpo que cae con una componente horizontal del movimiento describe una parábola" (Drake y Maclachlan, 1973). Otro ejemplos de investigaciones reciente como en Rodríguez (2012) introduce el concepto de desigualdades que es un tema necesario para el estudio de funciones, y lo realizó a partir de la simulación en Geogebra del movimiento de un auto en forma desacelerada siguiendo la didáctica de Cuevas & Pluvinage.

Esta investigación plantea nuevos marcos teóricos tales como: la modelación de fenómenos como procesos de matematización, es decir cómo interpretar determinados fenómenos físicos a partir de la Matemáticas, donde es preciso aplicar los conceptos matemáticos (Touma, 2009); y el diseño de los modelos de enseñanza de la física y las matemáticas con tecnología (Rojano, 2006).

Bibliografía

Aebli, H. (1995). Elaborar un curso de acción; Construir una operación; Formar un concepto. En H. Aebli, *12 formas básicas de enseñar. Una didáctica basada en la psicología.* (2 ed., págs. 159-233). España: Narcea.

Antolín, J. (2008). “Los docentes de Matemáticas, las Tic`s y los alumnos de secundaria (México)”. *Unión revista Iberoamericana de Educación Matemática*(14), 147-152.

Apostol, T., & Mnatsakanian, M. (2009). A New Look at the So-called Trammel of Archimedes. *American Mathematical Monthly, 116*(2), 115-133.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1978). *Educational Psychology: A Cognitive View.* (R. &. Holt, Ed.) New York.

Betancourt, Y. (Noviembre de 2009). Ambiente computacional para apoyar la ensenanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior. *Tesis de maestría*. Distrito Federal, México.

Boyer, C. (1956). History of Analytic Geometry. En C. Boyer, *The Alexandrian Age.* New York, USA: Scrypta Mathematica.

Bussi, M. (2005). The meaning of conic: Historical and didactical dimensions. *Mathematics Education Library, 37*, 39-60.

Cantoral, R., & Farfán. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*(42), 353-359.

Cantoral, R., & Montiel, G. (Septiembre de 2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números, 55*, 3-22.

Carbajal, A. (Noviembre de 2013). Una Propuesta de enseñanza de lugar geométrico, el caso de la línea recta. *Tesis de maestría*. México D.F., México.

Carvajal, A. (Noviembre de 2013). Una Propuesta de enseñanza de lugar geométrico, el caso de la línea recta. *Tesis de maestría*. México D.F., México.

CCH-UNAM. (2013). *Colegio de Ciencia y Humanidades*. Recuperado el 12 de Abril de 2013, de CCH, UNAM: http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_mateiaiv.pdf

Château, J. (2001). Ovide Declory, Édouard Claparède, María Montessori. En J. Château, *Los grandes pedagogos. Estudios realizados bajo la dirección de Jean Château.* (págs. 250-317). México: Fondo de Cultura Económica.

Contreras, A., Contreras, M., & García, M. (2002). Sobre Geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Relime, 5*(2), 111-132.

Costa, J. (2011). Plataforma de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico «desde abajo hacia arriba». *Revista Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 101-114.

Cruz L. & Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista de educación, 97,* 14-21.

Cuevas, C. (1998). Hacia una clasificación de la computación en la enseñanza de las matemáticas. En C. A. Cuevas Vallejo, *Investigaciones en matemática educativa* (págs. 273-288). México: Ed. Iberoamericana.

Cuevas, C. (2013). Matemáticas 3. En C. A. Cuevas Vallejo, *Matemáticas 3.* México: Oxford.

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et sciences cognitive, 8,* 273-292.

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2005). Una experiencia de enseñanza del objeto función. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10.*

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2005). Una Experiencia de Enseñanza del Objeto Función. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10*.

Cuevas, C., Mejía, H., Pluvinage, F., & Zubieta, G. (2005). *Geometría analítica dinámica.* México: Oxford.

De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrill, A., & Ramírez, A. (2001). *Geometría Analítica y Trigonometría.* México: Pearson.

Del Rio, J. (1991). *Aprendizaje por descubrimiento: estudio comparado de dos metodologías.* (C. d. Técnica, Ed.) Madrid, España: Centro de Publicaciones del Ministeria de Educación y Ciencia.

Drake, S., & Maclachlan, J. (Marzo de 1973). Galileo's Discovery of the Parabolic Trajectory. *Scientific American*, 102-110.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en matemática educativa II.* México: Iberoamerica.

Feynman, R. (1971). Fisica Volumen I. En R. P. Feynman, *Fisica Volumen I. Mecánica, Radiación y Calor.* California, USA: Addison-Wesley.

González, O. (2010). *Escenarios Didáctico Virtuales e Interactivos (EDVI), y el sistema Calc Visual soportados en un diseño didáctico como apoyo para el aprendizaje de un curso de Cálculo Diferencial. Tesis de Maestría*. CINVESTAV, México.

González, P. (2007). La Geometría Analítica de la Introdutio in Analisin Infinitorum de Euler. *Sigma. Revista de Matemáticas*(31), 169-194.

Goodstein, D., & Goodstein, J. (1999). *Feynman's Lost Lecture. The Motion of Planets Around the Sun.* New York: W.W. Norton & Company.

Halmos, P. (1994). What is teaching? *The American Mathematical Monthly*, 848-854.

Heath, T. (2006). A history of greek mathematics. En *A history of greek mathematics* (Vol. I). Dover, USA: Elibron classics.

Hewitt, P. G. (2004). Física Conceptual. México: Pearson Education.

Hohenwarter, M. (2013). *GeoGebra*. Obtenido de GeoGebra: http://www.geogebratube.org/?lang=es

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Aplications. ID1448, 7*.

Ímaz J., C., & Moreno A., L. (2010). La Génesis y la Enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor. En C. Ímaz J., & L. Moreno A., *La Génesis y la Enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* México D.F., México: Trillas.

Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Revista enseñanza de las ciencias, 27*(3), 433-446.

Jaime P., A., & Gutiérrez R., A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele. En S. LLinares, & M. V. Sánchez, *Teoría y práctica en eduación Matemática.* (págs. 295-384). Sevilla, España: Alfar.

Konold, C., & Lehrer, R. (2008). Technology and Mathematics Education: An essay in honor and jim kaput. *Handbook of International Research in Mathematics Education. Second edition.*, 49-71.

Lehmann, C. (1989). Geometría Analítica. En C. H. Lehmann, *Geometría Analítica* (I. R. Díaz, Trad., Vol. Décima tercera). México D.F.: Limusa.

Luelmo, M. T. (1997). Un entorno para el aprendizaje de las matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas., 12,* 5-7.

McFarlane, Á. (2001). *El aprendizaje y las tecnologías de la información.* México: Santillana.

MEN. (2006). *Ministerio de Educación Nacional.* Recuperado el 10 de 05 de 2013, de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Mochón, S. (2006). *Avances y hallazgos en la implementación de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. Matemática educativa: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. México: Santillana.

Moreno, L., & Santos T., M. (2008). "Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. *Handbook of International Research in Mathematics Education. Second edition*, 319-351.

NCTM. (May/Jun de 2008). Recuperado el 2013, de From News Bulletin: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton.

Reeuwijk, V. M. (1997). Las Matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las Matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 12*, 9-16.

Rodríguez E., A. (2012). Un acercamineto funcional a la resolución de inecuaciones matemáticas. *Tesis de maestría*. México D.F., México.

Rojano C., M. (2006). *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula.* México D.F.: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN. Departamento de Matemática Educativa.

Rossing, T. D., Moore, R. F., & Wheeler, P. A. (2001). Auditorium Acoustics. En *The Scince of Sound* (third ed., págs. 525-526). Addison Wesley.

Sacristán, A., Calder, N., Rojano, T., Santos, M., Friedlander, A., & Meissner, H. (2010). The Influence and shaping of digital technologies on the learning-and learning trayectories-of mathematical concepts (C.H.Lagrange). *Mathematics Education and Technology Rethinking the terrain, the 17th ICMI study*, 179-226.

Santos, M. (2004). The role of dynamic software in the identification and construction of mathematical relationships. Journal of computers in mathematics and science teaching. *23*(4), 399-413.

Santos, M., & Espinosa, H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations using dinamyc software. *Int Jnl Mathematical Education in Science and Technology, 33*(1), 37-50.

Schmidt, R. (1993). *Geometría descriptiva con figuras estereoscópicas.* Barcelona: Reverté.

SEP. (2013). *Dirección General del Bachillerato.* Recuperado el 5 de Mayo de 2013, de Dirección General del Bachillerato: http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfb_3sem/MATEMATICAS-III.pdf

Sullivan, M. (1997). Trigonometría y Geometría Analítica. En S. Michael, *Trigonometría y Geometría Analítica* (4 ed.). México D.F., México: Prentice Hall.

Tabach, M., Hershkowitz, R., Arkavi, A., & Dreyfus, T. (2008). “Computerized environments in mathematics classrooms". *Handbook of International Research in Mathematics Education. Second edition*, 784-805.

Tall, D. (1990). "A Versatile Approach to Calculus and Numerical Methods", Teaching Mathematics and its Applications. *Mathematics Education Centre University of Warwick, CONVENTRY CV47 AL U.K, 9*(3), 124-131.

Touma, G. (2009). *Annales de didactique et de sciences cognitives, 14*, 79-101.

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche, *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (págs. 198-230). New York: Springer.

UCNCIMix. (27 de Noviembre de 2009). *youtube*. Recuperado el 3 de Abril de 2013, de youtube: http://www.youtube.com/watch?v=NSqXNoWfN1Q

Waldegg, G. (1982). *Historia del Cálculo.* México: Sección de Matemática Educativa y de Estudios Avanzados del IPN.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2008). “Technology and curriculum design”. *Handbook of International Research in Mathematics Education. Second edition*, 806-837.

Anexos

Anexo I. Plan curricular sobre el tema de la elipse en el CCH-UNAM

UNIDAD IV. ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

Propósitos

✍ Reafirmar el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse y la circunferencia y avanzar en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	**ESTRATEGIAS**	**TEMÁTICA**
El alumno: Respecto al estudio de la Elipse ? Realiza al menos una construcción de la elipse, y en función de ello: ✍ Identifica los elementos que la definen. ✍ Reconoce los tipos de simetría de esta curva. ✍ Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico. ✍ Deduce la expresión con radicales que expresa la propiedad de los puntos de dicho lugar geométrico. ? A partir de la expresión anterior, comprende cómo se obtiene la ecuación ordinaria (fuera del origen) de la elipse.	? Para motivar el interés y curiosidad de los alumnos, se les puede pedir que asistan al Museo de *Universum,* ubiquen ahí elipses y circunferencias, investiguen en dónde están presentes y algunas de sus características. Otros tópicos para investigar son los propósitos y características de la bóvedas de ciertos templos coloniales, o bien qué lugar ocupa el sol en las órbitas planetarias, etcétera. ? También se les puede involucrar en realizar los cortes del cono ya sea con conos de plastilina, unicel o "vasos" cónicos de papel, de modo que vean cómo de acuerdo al tipo de corte, se obtiene una u otra cónica. Esto también puede aprovecharse para hacer ver a la circunferencia como un caso límite de la elipse. ? Se recomienda usar el método del jardinero para trazar la elipse, ya que éste permite visualizar las propiedades de sus puntos, y llegar así a su definición como lugar geométrico. También se sugiere apoyarse en la expresión:	Estudio de la Elipse La elipse como lugar geométrico. a) Trazo de la elipse y sus propiedades de simetría. b) Definición geométrica de la elipse. c) Elementos que definen a la elipse: distancia focal, eje mayor y eje menor. Relación entre ellos. Ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas: a) Ecuación ordinaria con centro fuera del origen. b) Ecuación ordinaria con centro en el origen. c) Ecuación general.
? Utilizando la ecuación ordinaria de la elipse, obtiene las otras formas. ? Transita de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria y viceversa. Para ello, aplica el método de completar cuadrados. ? Determina los elementos esenciales de una elipse, a partir de su ecuación dada en la forma ordinaria o general, y los utiliza para bosquejar su gráfica. ? Concatena con coherencia sus argumentos y deducciones en el proceso para obtener la definición, la ecuación y la gráfica de una elipse. ? Aplica los conocimientos adquiridos en la resolución de diversos problemas. Con relación a la circunferencia ? Reconoce a la circunferencia como el lugar geométrico de mayor frecuencia en su entorno. ? Obtiene el lugar geométrico de la circunferencia como caso límite de la elipse.	**$d(P, F_1) + d(P, F_2) = C$** como un paso intermedio, que facilitará obtener la ecuación de la elipse. ? A partir de esta expresión el profesor puede conducir la deducción de la ecuación ordinaria con centro fuera del origen y eje mayor paralelo a alguno de los ejes de coordenadas. ? En la misma actividad del método del jardinero, pedirles que alejen y acerquen los focos, observen qué sucede y obtengan conclusiones al respecto. ? Utilizar el teorema de Pitágoras para establecer la relación entre **a, b** y **c**. ? Cada vez que obtengan la ecuación ordinaria, es bueno pedirles que tracen un boceto de su gráfica a partir del reconocimiento de sus elementos, de modo que valoren las ventajas que esto representa. Luego cuando ya estén trabajando con la fórmula general y se desee transformarla a la ordinaria, se les puede pedir que obtengan la gráfica y dejarlos que exploren dificultades y comparen lo que hacían cuando tenían la forma ordinaria. A partir de allí, tendrá sentido el aprender cómo llevar a cabo el camino de regreso de la general a la ordinaria, ya que éste, como sabemos, es más complicado. ? Para introducir la circunferencia como caso límite de la elipse, hay que aprovechar y retomar las observaciones que los alumnos obtuvieron cuando construyeron la elipse por el método del jardinero (cuando los dos focos coinciden) y con los cortes del cono (cuando el corte llega a ser paralelo a la	Aplicaciones: a) La tangente a la elipse en un punto que pertenece a ésta b) Intersecciones de rectas con la elipse. c) Resolución de problemas diversos. Estudio de la Circunferencia La circunferencia como lugar geométrico: a) Definición geométrica de la circunferencia. b) Elementos que definen a la circunferencia. Ecuación de la circunferencia. a) Ecuación ordinaria, con centro fuera del origen. b) Ecuación ordinaria con centro en el origen. c) Ecuación general.

Anexo II. Plan curricular de la SEP sobre el tema de la elipse

MATEMÁTICAS III

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
VII	APLICAS LOS ELEMENTOS Y LAS ECUACIONES DE LA ELIPSE	12 horas

Desempeños del estudiante al concluir el bloque

Identifica los elementos asociados a la elipse.

Reconoce la ecuación ordinaria y general de la elipse.

Aplica los elementos y las ecuaciones de la elipse, en la solución de problemas y/o ejercicios de su entorno.

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Elipse Elementos asociados a la elipse Ecuación ordinaria de elipses horizontales y verticales con centro en el origen y ejes, los ejes coordenados Ecuación ordinaria de elipses horizontales y verticales con centro fuera del origen y ejes paralelos a los ejes coordenados Ecuación general de la elipse	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos. Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Actividades de Enseñanza	Actividades de Aprendizaje	Instrumentos de Evaluación
Solicitar una investigación, integrados en equipos, sobre la definición de la elipse y sus elementos y contrasten la información con otros equipos.	Realizar una investigación, integrados en equipos, sobre la definición de la elipse y sus elementos y contrasten la información con otros equipos.	Lista de cotejo para evaluar la investigación realizada.
Ejemplificar con un ejercicio la obtención de la ecuación ordinaria de una elipse vertical y/o horizontal con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos.	Realizar ejercicios donde obtengan la ecuación ordinaria de una elipse vertical y/o horizontal con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos.	Rúbrica para evaluar la solución de ejercicios y/o problemas.
Ejemplificar con un ejercicio la obtención de la ecuación ordinaria de una elipse vertical y/o horizontal con centro fuera del origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos.	Realizar ejercicios donde obtengan la ecuación ordinaria de una elipse vertical y/o horizontal con centro fuera del origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos.	Rúbrica para evaluar la solución de ejercicios y/o problemas.
Demostrar con un ejercicio la obtención de la ecuación general de una elipse a partir de la ecuación ordinaria o viceversa.	Realizar ejercicios para obtener la ecuación general de la elipse a partir de la ecuación ordinaria o viceversa.	Rúbrica para evaluar los diferentes tipos de ecuaciones de la elipse.
Proponer un trabajo final en equipos, sobre la aplicación de las distintas formas de las ecuaciones de la elipse.	Diseñar una aplicación contextual sobre las distintas ecuaciones de la elipse y exponer los resultados frente al grupo (por ejemplo, en monumentos locales, iglesias, puentes, entre otros).	Lista de cotejo que evalúe las distintas aplicaciones de las ecuaciones de la elipse en los contextos propuestos.

Rol del docente

Para el desarrollo de competencias genéricas y disciplinares extendidas en este bloque de aprendizaje, el o la docente:

Facilita el proceso educativo al diseñar actividades significativas integradoras que permitan vincular los saberes previos del alumnado con los objetos de aprendizaje.

Propicia el desarrollo de un clima escolar favorable, afectivo, que promueva la confianza, seguridad y autoestima de las y los alumnos y motiva su interés al proponer tópicos actuales y significativos que los lleven a usar las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC's).

Despierta y mantiene el deseo de aprender al establecer relaciones y aplicaciones de las competencias en su vida cotidiana.

Ofrece alternativas de consulta, investigación y trabajo, utilizando de manera eficiente las TIC's e incorporando diversos lenguajes y códigos (iconos, hipermedia y multimedia), con el fin de contribuir con el aprendizaje del alumnado.

Coordina las actividades de las alumnas y los alumnos, ofreciendo una diversidad de interacciones entre ellos.

Favorece el trabajo colectivo del alumnado, recurriendo a actividades variadas que estimulen su participación activa en la clase.

Conduce las situaciones de aprendizaje bajo un marco de respeto a la diferencia y de promoción de los valores cívicos y éticos.

Diseña instrumentos de evaluación del aprendizaje considerando los niveles de desarrollo de cada grupo que atiende, fomentando la autoevaluación y coevaluación.

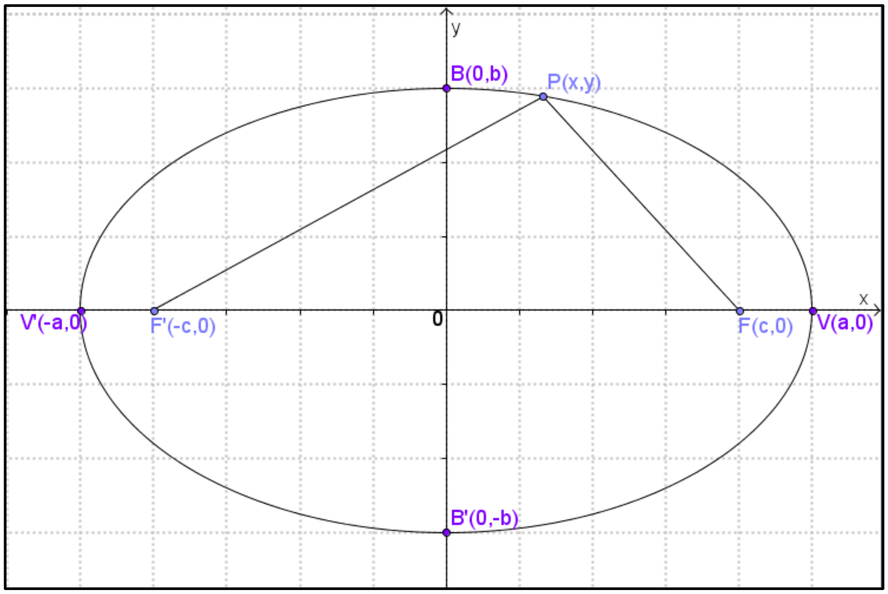
Material didáctico

Organizador gráfico, problemario, software para presentaciones electrónicas, software educativo.

42 DGE/DCA/2013

Anexo III. Demostración de la ecuación canónica de la elipse

Para deducir la ecuación básica o canónica de la elipse se procede a dibujar la con centro en el origen de un plano cartesiano, y los ejes de la elipse sobre los mismos ejes cartesianos como se indica en la siguiente figura.



Partiendo dela definición matemática de lugar geométrico de la elipse:

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a \qquad \text{(a)}$$

Por Geometría analítica se establece que la distancia entre dos puntos F a P y F' a P son respectivamente:

$$\overline{FP} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \quad (7) \text{ y } \quad \overline{F'P} = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} \qquad \text{(b)}$$

Entonces, sustituyendo (7) y (8) en (3), se obtiene:

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a \qquad \text{(c)}$$

Resolviendo algebraicamente, se obtiene:

$$\sqrt{\left(x-c\right)^2+(y-0)^2}+\sqrt{\left(x+c\right)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{\left(x+c\right)^2+(y-0)^2}=2a-\sqrt{\left(x-c\right)^2+(y-0)^2}$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$\left(\sqrt{\left(x+c\right)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{\left(x-c\right)^2+(y-0)^2}\right)^2$$

$$\left(x+c\right)^2+(y-0)^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\left(x-c\right)^2+(y-0)^2$$

$$\cancel{x}^2+2xc+\cancel{c}^2+\cancel{y}^2=4a^2-4a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}+\cancel{x}^2-2xc+\cancel{c}^2+\cancel{y}^2$$

$$4a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=4a^2-4xc \qquad \text{(c)}$$

Dividiendo la ecuación (c) entre 4:

$$a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=a^2-xc \qquad \text{(d)}$$

Elevando nuevamente al cuadrado en ambos lados de la igualdad:

$$\left(a\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-xc\right)^2$$

$$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

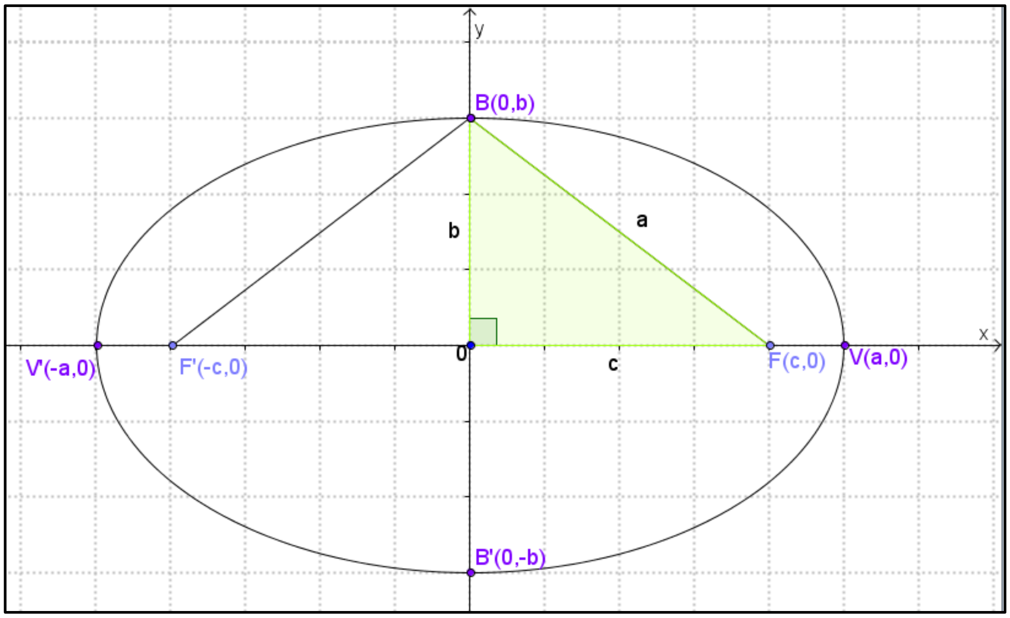
$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2$$

$$a^2x^2-x^2c^2=a^4-a^2c^2-a^2y^2$$

$$x^2\left(a^2-c^2\right)=a^2\left(a^2-c^2-y^2\right) \qquad \text{(e)}$$

Cuando los radiovectores se interceptan en el punto B como lo muestra la siguiente figura, se forma un triángulo rectángulo OBF, del cual se relacionan pitagóricamente los parámetros a, b y c de la elipse:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{(f)}$$

Sustituyendo esta relación de la ecuación (f) en la (e), se obtiene:

$$x^2\left(b^2\right) = a^2\left(b^2 - y^2\right)$$

$$x^2b^2 = a^2b^2 - a^2y^2$$

Agrupando las variables a un mismo lado de la igualdad:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo entre a^2b^2 en ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(g)}$$

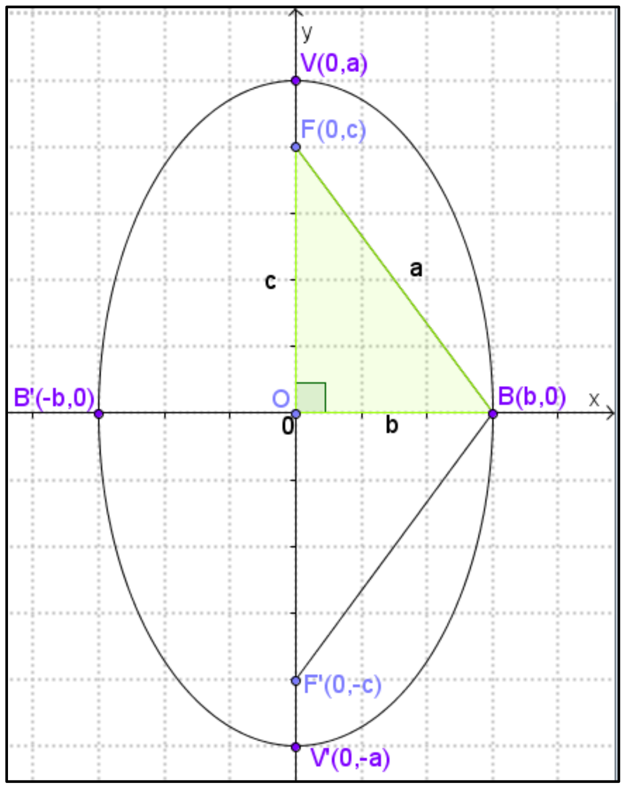
Que es la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen, de donde:

a : Longitud del semieje mayor.

b: Longitud del semieje menor.

$c=\sqrt{a^2-b^2}$: Distancia focal

En la sigueinte figura se observa una elipse vertical. En este caso la distancia focal c, y el eje mayor *a* se encuntran sobre el eje “y”. El eje menor *b* se encuentra sobre el eje “x”.



Siguiendo el mismo proceso algebráico anterior, se puede llegar a la siguiente ecuación canónica:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{(h)}$$

La diferencia entre la ecuación canónica de la elipse para una elipse horizontal con centro en el origen y ejes paralelos a los cartesianos, respecto a una vertical se puede observar en las ecuaciones (g) y (h). Para la horizontal la magnitud del eje mayor al cuadrado (a^2) está debajo de la x^2, y para la vertical debajo de y^2, o sea:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

- Si a^2 siempre se encuentra como denominador de x^2 en la ecuación canónica, la elipse es horizontal.
- Si a^2 siempre se encuentra como denominador de y^2 en la ecuación canónica, la elipse es vertical.

Se cumple siempre que:

Eje mayor = 2a > eje menor 2b, por lo que siempre a>b

Anexo IV. Procedimiento algebraico de la ecuación general de la elipse a partir de ecuación canónica de la elipse

Partiendo de la ecuación canónica de la elipse horizontal, con centro fuera del origen $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, se desarrolla la fracción algebraica de la siguiente manera:

$$\frac{b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=1$$

$$b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)+a^2\left(y^2-2yk+k^2\right)=a^2b^2$$

$$b^2x^2-2xb^2h+b^2h^2+a^2y^2-2ya^2k+a^2k^2=a^2b^2$$

$$\underset{A}{(b^2)}x^2+\underset{C}{\left(a^2\right)}y^2+\underbrace{\left(-2hb^2\right)}_{D}x+\underbrace{\left(-2ka^2\right)}_{E}y+\underbrace{\left(b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2\right)}_{F}=0$$

Donde $A=b^2, C=a^2, D=-2hb^2, E=-2ka^2, F=b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$ son coeficientes constantes, que al sustituirlas obtenemos:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad \text{Ecuación general de la elipse}$$

Si se realiza este mismo proceso partiendo de la ecuación canónica de la elipse vertical, con centro fuera del origen $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, y realizando el mismo procedimiento algebraico anterior, se obtiene:

$$\underset{A'}{(a^2)}x^2+\underset{C'}{\left(b^2\right)}y^2+\underbrace{\left(-2ha^2\right)}_{D'}x+\underbrace{\left(-2kb^2\right)}_{E'}y+\underbrace{\left(a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2\right)}_{F'}=0$$

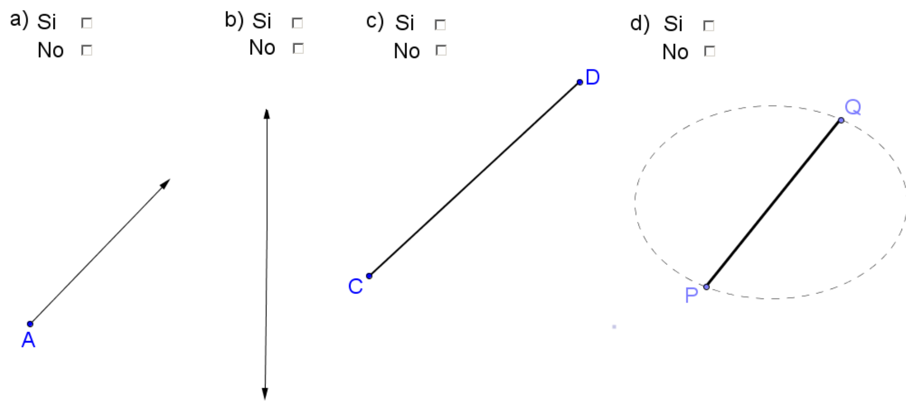
$$A'x^2+C'y^2+D'x+E'y+F'=0$$

Según lo anterior se deduce una ecuación cuadrática de dos incógnitas que tiene la misma forma a la demostrada anteriormente. De esta manera se puede definir matemáticamente a la elipse como una ecuación de segundo grado con dos incógnitas de la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ donde $A\neq B\neq 0$ y poseen el mismo signo.

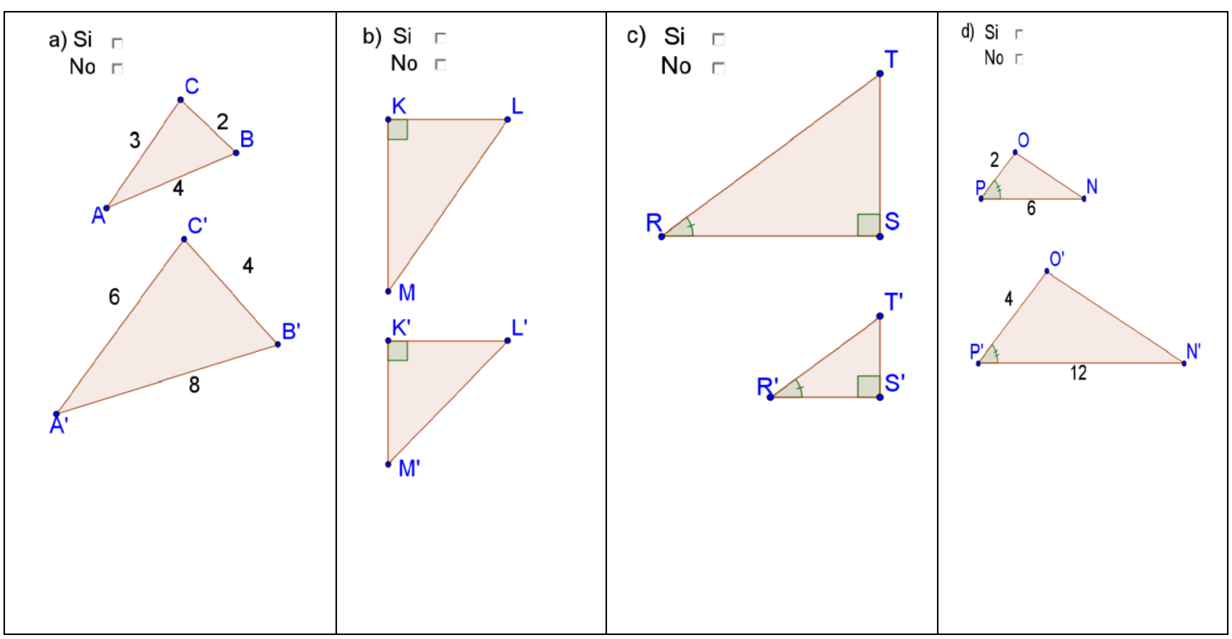
Anexo V. Test diagnóstico de conocimientos

Nombre del estudiante:_______________________________________

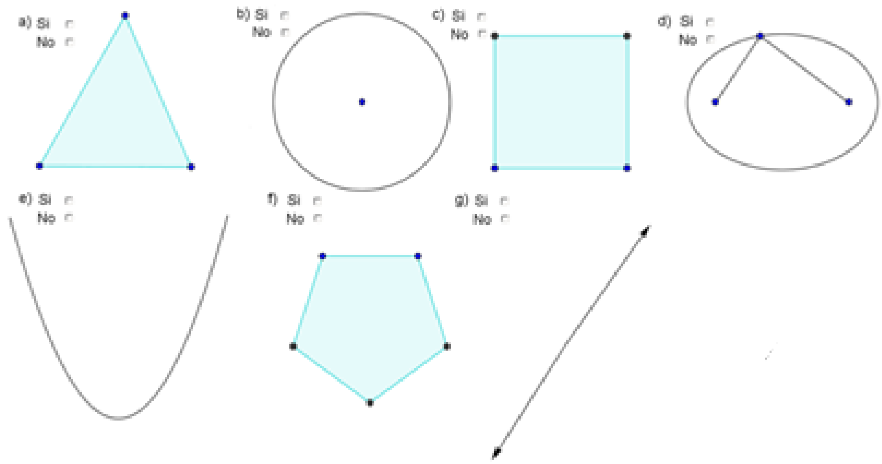
1. ¿Cuál de las siguientes "líneas" es un segmento? Escribe una palomita en "si" si lo es o en "no" si no lo es.



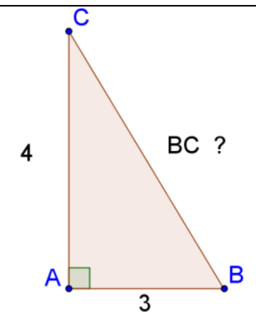
2. ¿Qué pareja de triángulos son semejantes? Escribe una palomita en "si" si lo es o en "no" si no lo es, y luego en los casos afirmativos, establece proporciones entre sus segmentos

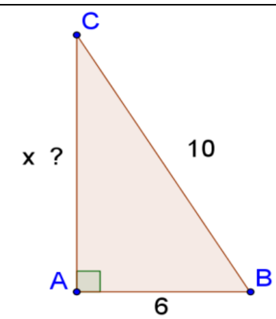


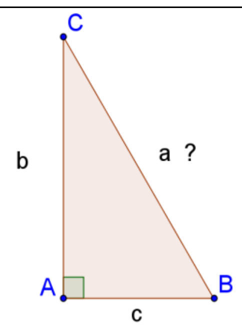
3. ¿Cuál de las siguientes figuras son un lugar geométrico Escribe una palomita en "si" si lo es o en "no" si no lo es.

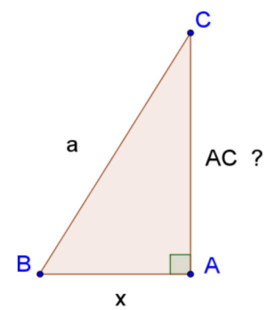


4. Halla el valor ya sea numérico o algebraico de la incógnita “?” utilizando el teorema de Pitágoras.

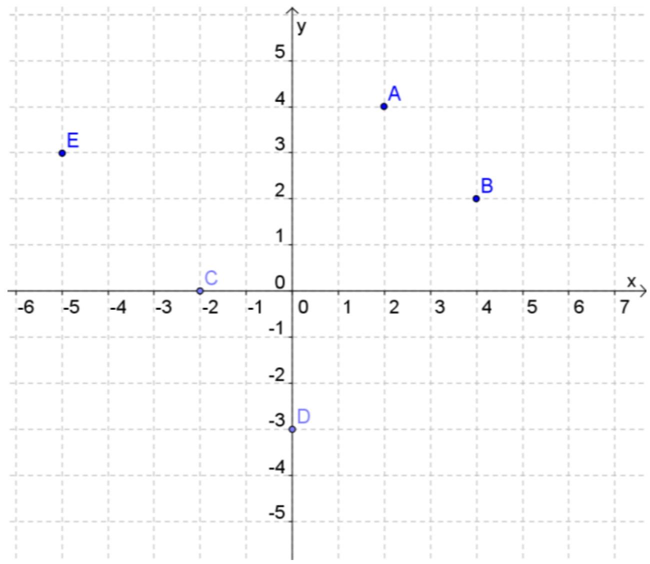








5. Escribe las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, presentes en el siguiente el plano cartesiano:



A (_____._____)

B (_____._____)

C (_____._____)

D (_____._____)

E (_____._____)

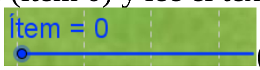
6. Completa las siguientes ecuaciones, para convertirlas a trinomio cuadrado perfecto.

a) $x^2 - 10x = 0$	b) $x^2 + 3x = 1$

Anexo VI. Actividad 1. La elipse como lugar geométrico

Nombre del estudiante: ____

Abre en la carpeta *Actividad 1, y* ve al “EDVI-Jardinero”. Luego da clic en el botón 

(ítem 0) y lee el texto sobre el método del jardinero. Cuando termines mueve el deslizador 

(ubicado en la parte superior derecha de la pantalla), del ítem 0 al ítem 1, dando clic sobre éste y arrastrándolo; y sigue los puntos a continuación.

Sección 1: Construyendo el trazo de una elipse. (Ítem 1)

Un jardinero desea construir un jardín en forma de elipse, y para ello clava dos estacas en dos puntos fijos llamados F y F’ (focos). El jardinero sujeta los extremos de la cuerda a las estacas, y tensionándola realiza un trazo como lo muestra la figura. *Nota: La longitud de la cuerda es mayor que la distancia de separación de las estacas.*

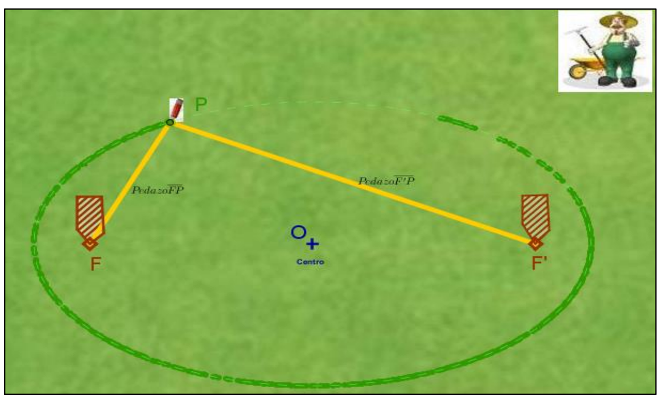


Figura. 1 Jardín elíptico

Para hacerlo abre la carpeta *Actividad 1 y* ve al “EDVI-Jardinero”, y realiza siguiendo los siguientes pasos :

a) Separa las estacas F y F’ 4 unidades del centro, dando clic sobre el punto del deslizador 

hasta llevarlo a c=4. (el centro es un punto medio O entre F y F’, o centro de la elipse). *Nota: Llamaremos distancia focal “2c” a la distancia entre los focos.*

b) Utiliza una cuerda de longitud 10 unidades ubicando el punto del deslizador 

c) Para trazar la elipse con el lápiz, da clic en la casilla 

con el fin de activar el rastro. Da clic sostenidamente sobre el punto P, y arrástralo con el mouse suavemente trazando la elipse o contorno del jardín. Si deseas borrar el rastro de la tinta del lápiz, da clic en el botón “Borrar Rastro”. 

d) Una vez trazada la elipse, ubica el punto P de la elipse en cualquier lugar de su contorno y suma las longitudes de los pedazos de las cuerdas $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ que puedes observar en “*VER DATOS*” ubicado en parte derecha de la pantalla. A éste primer punto sobre la elipse lo registraremos como P1 en la tabla 1.

e) Repite el proceso anterior para cuatro puntos diferentes sobre el contorno de la elipse. Registra los datos en la siguiente tabla como puntos P2, P3, P4 y P5:

Puntos sobre la elipse	**Longitud del pedazo de cuerda** $\overline{F'P} =$	**Longitud del pedazo de cuerda** $\overline{FP} =$	**Suma de radiovectores o pedazos de cuerdas:** $\overline{F'P} + \overline{FP} =$
P1			
P2			
P3			
P4			
P5			

Tabla 3. Registro de sumas de los pedazos de cuerdas o radiovectores de la elipse

Responde las preguntas 1 y 2 marcando con una palomita ☑ la opción que considere correcta:

1. La suma de las distancias del punto P a los puntos fijos F y F’, ¿varía o se mantiene constante?

□ $\overline{F'P} + \overline{FP} = \text{Constante}$ □ $\overline{F'P} + \overline{FP} = \text{Variable}$

2. Compara las sumas $\overline{F'P} + \overline{FP}$ de la tabla 1, con la longitud de la cuerda. ¿Son iguales?

□Si □No

3. Teniendo en cuenta lo anterior, concluye con tus propias palabras la condición que definen todos los puntos sobre una elipse, o lugar geométrico de la elipse:

____
____
____

4. En discusión grupal compara tu definición con las de tus compañeros, y lleguen a una definición entre todos con ayuda del profesor:____

____

____

Sección 2: Elementos de la elipse (Ítem 2)

Pasa al ítem 2 

. Activa la casilla 

dando clic sobre su respectivo recuadro, y observa lo que aparece en la gráfica.

Activa una por una las casillas, y observa cada uno de los elementos que contiene la elipse. Retroalimenta y concluye con ayuda del profesor la definición de cada uno de los siguientes elementos:

- Focos y centro: ____

  ____

- Eje focal:____

  ____

- Eje normal: ____

  ____

- Vértices y puntos B, B’:____

  ____

- Eje mayor:____

  ____

- Semieje mayor:____

  ____

- Eje menor:____

  ____

- Semieje menor:____

  ____

- Distancia focal:____

____

- Radiovectores:____
  ____

Retroalimentación:

Definimos que la longitud del eje mayor $\overline{VV'} = 2a$ siendo "a" un parámetro.
Entonces la longitud del semieje mayor que va del centro de la elipse a un foco es igual a "a" unidades.

Definimos que la longitud del eje menor $\overline{BB'} = 2b$ siendo "b" un parámetro.
Entonces la longitud del semieje menor que va del centro de la elipse a un punto B o B' es igual a "b" unidades.

PRÁCTICA. Completa en los espacios en blanco la cantidad correcta:

- Si el eje mayor de una elipse mide 10 cm, entonces el semieje mayor mide: ________
- Si el eje menor de una elipse mide 8 cm, entonces el semieje menor mide: _________
- Si la distancia entre dos vértices mide 7 cm, entonces el eje mayor mide: __________
- Si la distancia del centro a uno de los focos de la elipse mide 3 cm, entonces la distancia focal mide:__________
- Si la distancia entre dos focos de una elipse es de 5 cm, entonces la distancia del centro a uno de los focos es igual a: ___________
- Si la distancia focal de una elipse es de 8 cm, entonces el parámetro "c" es igual a: ____________
- Si la distancia entre dos vértices de una elipse es de 5 cm, entonces el parámetro "a" es igual a:________
- Si el eje menor de una elipse mide 4 cm, entonces el parámetro b es igual "a":_______
- Si el parámetro $a = 5cm$, entonces el eje mayor de dicha elipse es igual a: _________
- Si el parámetro $c = 2cm$, entonces la distancia focal es igual a: _________

Dibuja una elipse, cuyo eje mayor sea igual a 8 unidades, y eje mayor de 6 unidades.

Sección 3: Simetría de la elipse

Utiliza la hoja de anexo de la figura 2, y sigue los siguientes pasos:

a) Traza con un lápiz el trazo del eje focal y normal de la elipse dibujada en la hoja de anexo.

b) Marca los puntos de intersección del eje focal con la elipse o vértices V y V'.

c) Realiza un doblez a la curva calcada, que pase por la línea del eje focal y otro que pase por la línea del eje normal. ¿Hay simetría de la curva respecto a dichos ejes?

□Si □No

Explica tu respuesta:

____

____

a) Posiciona el punto P sobre el vértice V', y observa que el pedazo de cuerda $\overline{PF}$ cubre la distancia de F a V', y el pedazo de cuerda $\overline{PF'}$ cubre la distancia de F' a V'. Si trasladamos el pedazo de cuerda PF' hasta FV, éste puede cubrirlo gracias a la propiedad estudiada anteriormente.

De lo anterior podemos concluir que la cuerda del elipsógrafo puede cubrir todo el eje mayor, o la distancia del vértice V a V'.

b) Completa el espacio en blanco:

Si se traza una elipse con un elipsógrafo, cuya cuerda mide 10 cm, entonces la longitud del eje mayor de dicha elipse es igual a ___________, y su semieje mayor igual a ___________.

De lo anterior podemos conjeturar que: Una elipse es el lugar geométrico de los puntos que se mueven en el plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es igual a la longitud del eje mayor $\overline{V'V}$, es decir: (completa la condición en el espacio en blanco de la conjetura)

$$\overline{F'P} + \overline{FP} = \text{constante=longitud de la cuerda}$$
$$\overline{F'P} + \overline{FP} = \overline{V'V}$$
$$\overline{F'P} + \overline{FP} = \_\_\_\_\_\_$$

Sección 4: Relación de los parámetros a, b y c de la elipse. Ítem 3

Pasa al ítem 3 del programa en Geogebra, y sigue los pasos a continuación:

c) Mueve lentamente el punto P y ubícalo sobre el punto B.

En esta posición los pedazos de cuerda $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ son iguales debido a que la cuerda es dividida a la mitad por la simetría de la elipse con el eje normal.

Como la longitud de la cuerda es igual a dos veces "a" entonces la mitad de la cuerda es igual a "a" unidades, por lo tanto la distancia de un foco F o F' al punto B es igual a la longitud del semieje mayor, o sea "a" unidades.

d) Activa la casilla ☑ **Muestra parámetros: a,b,c** , y observa que el triángulo OBF' es rectángulo, con catetos $\overline{OB} = b$, $\overline{OF'} = c$ e hipotenusa $\overline{F'B} = a$; entonces la relación pitagórica entre dichos parámetros es:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2},\ b = \sqrt{a^2 - c^2},\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Recuerda que: el parámetro "a" es la distancia del centro a cualquiera de los vértices o semieje mayor, por lo tanto "2a" es la longitud del eje mayor.

El parámetro "b", es la distancia del centro al punto B o B' o semieje menor, por lo tanto "2b" es la longitud del eje menor.

El parámetro "c" es la distancia del centro a un foco, por lo tanto "2c" es la distancia focal.

Ejemplo: ¿Cuánto vale la longitud del eje menor y distancia focal de una elipse, si la distancia entre el centro y cada foco es de 3 unidades y el eje mayor mide 8 unidades?

Solución: Como el eje mayor mide es $2a = 8$ unidades, entonces la distancia del centro a los vértices es $a = 4$ unidades. La distancia del centro al foco es $c = 3$ unidades por lo tanto la distancia focal es dos veces el valor de "c" o sea 6 unidades.

Para calcular la longitud del eje menor, se aplica la relación pitagórica entre los parámetros a, b y c, despejando el valor de b, o sea:

$a^2 = b^2 + c^2$, entonces:

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} = 2.646$ unidades

Ejercicios propuestos

1. ¿Cuánto vale la distancia focal de una elipse, cuya distancia del centro a los vértices es de 10 unidades, y la longitud del eje mayor es de 8 unidades?

□18 □ 2 □12 □ 6 □Otra □No sé

2. ¿Calcula la longitud del semieje mayor, si la distancia focal es de 8 unidades, y la longitud del semieje menor 3 unidades?

   □ $a = 25$ □ $a = 11$ □ $a = 5$ □Otra □No sé

3. ¿Cuánto debe medir la cuerda de un elipsógrafo, si un jardinero desea construir un jardín elíptico con una distancia focal de 10 m, y un eje menor de 8m ?

   □ $\sqrt{41}$ m □ $\sqrt{18}$ m □ $2\sqrt{41}$ m □Otra □No sé

4. ¿Cuál debe ser la separación entre dos estacas (focos) de un elipsógrafo, si una persona desea construir una elipse de eje mayor igual a 20 cm, y 10 cm de eje menor?

   □ $5\sqrt{3}$ cm □ $5\sqrt{5}$ cm □ $10\sqrt{3}$ cm □Otra □No sé

5. Bosqueja la gráfica de una elipse, de 8 cm de distancia focal, y 10 cm de longitud del eje mayor.

HOJA DE ANEXO.

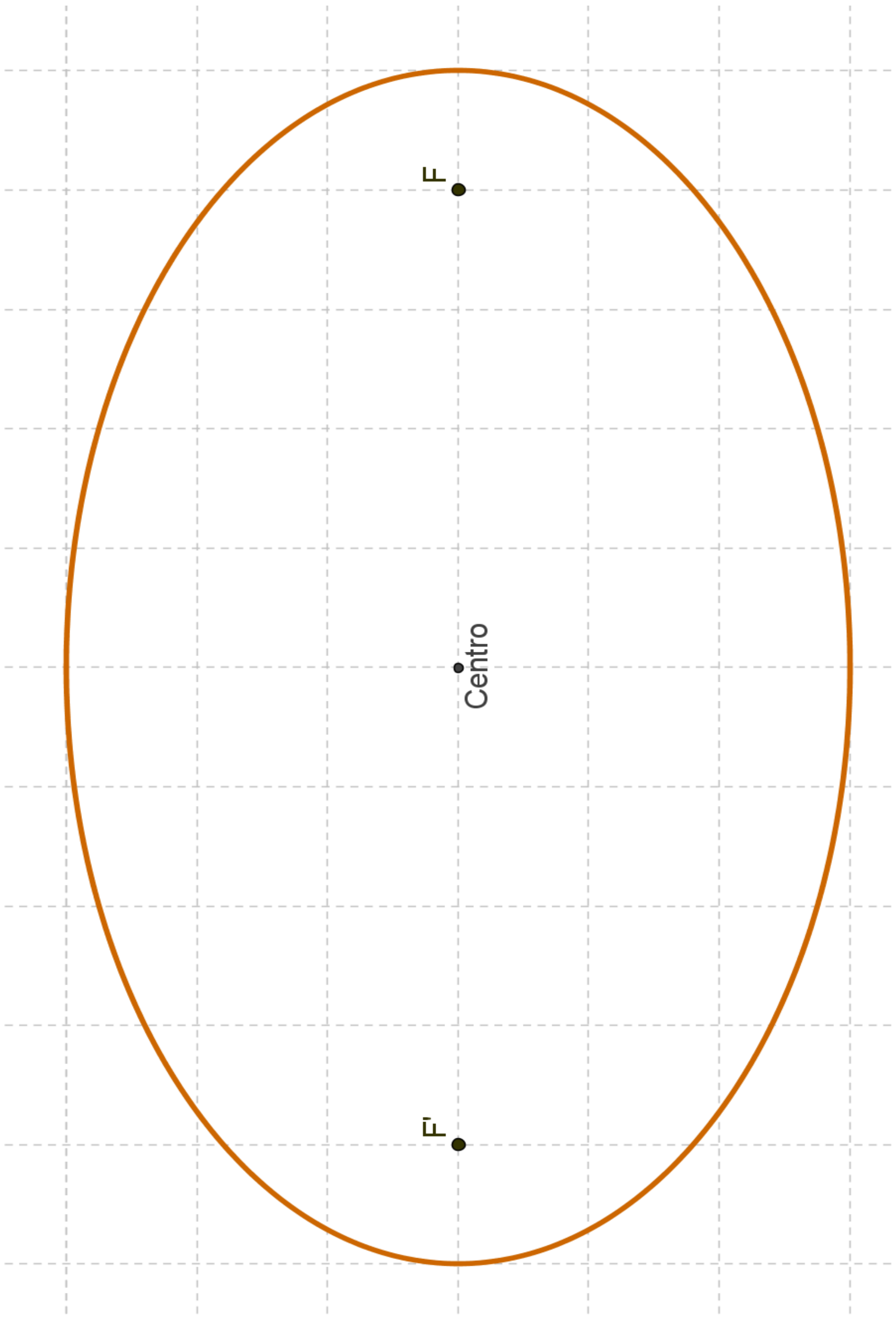


Figura 2

Anexo VII. Actividad 2. Excentricidad de la elipse

Nombre del estudiante: ____

Sección 1: Órbitas de los planetas Tierra y Marte

Abre en la carpeta "Actividad 2" el archivo "EDVI-Movimiento planetario" y da clic en el botón [Play / Pausa], y observa el movimiento de los planetas.

Marca con una palomita ☑ la respuesta que creas correcta:

1. La distancia del Sol a la Tierra y del Sol a Marte, ¿es igual en todo el movimiento, o varía? *Nota: Observa los valores de las distancias en el recuadro inferior derecho de la pantalla llamado "Datos de longitud"*

   □Constante □Varía

2. ¿Cuál de las dos órbitas observas que es más redonda?

   □Órbita terrestre □Órbita marciana □Las dos son iguales

<u>Dato histórico</u>

En 1609 Johannes Kepler (1571-1620), basado en las observaciones del astrónomo Tycho Brahe, enunció las leyes referentes a las órbitas de los planetas. Una de ella establece que los planetas describen **órbitas elípticas (*en forma de elipse*)** alrededor del Sol, en las cuales **el Sol se encuentra en uno de los focos**.
El modelo de órbitas elípticas de los planetas alrededor del Sol, derrocó al modelo geocéntrico de Ptolomeo que decía que la Tierra era el centro del universo, y también explicar como el Sol parece estar más lejos de la Tierra en el verano del hemisferio norte (como podemos apreciar en México en el mes de Junio), época en la cual la Tierra se encuentra en las zonas más distantes de la órbita con respecto al Sol.

<u>Definiciones</u>: La distancia más cercana de un planeta al Sol se le llama perihelio, y a la más lejana afelio.

Registra el valor aproximado de la distancia del Sol a la Tierra, más lejano y cercano, e igualmente con los valores de distancia del Sol a Marte, en el siguiente recuadro

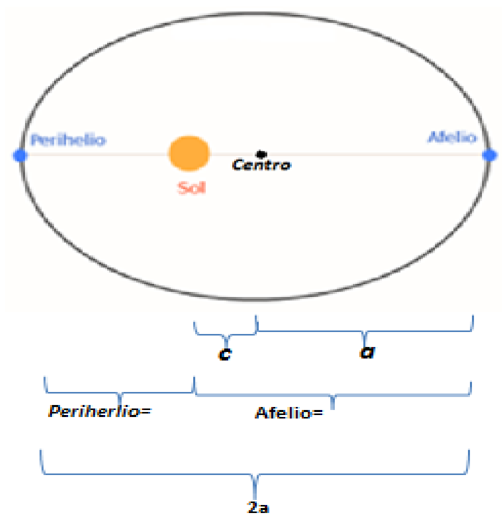
Afelio terrestre = ________________________ (millones de km)

Perihelio terrestre = _______________________ (millones de km)

Afelio marciano = _________________________ (millones de km)

Perihelio marciano = _______________________ (millones de km)

3. Observa la siguiente gráfica, y arma las ecuaciones que relacionan los parámetros "a" y "c" de la elipse, teniendo en cuenta que el Sol está en uno de los focos, y que la los vértices de la elipse son los puntos más extremos de ésta.



La ecuación de afelio y perihelio para un planeta es respectivamente:

□ $\begin{array}{l} Afelio = a + c, \\ Perihelio = a - c \end{array}$ □ $\begin{array}{l} Afelio = a - c, \\ Perihelio = a + c \end{array}$ □Otra________________

4. El sistema de ecuaciones para el afelio y perihelio para el planeta Tierra, son respectivamente:

□ $\begin{cases} a + c = 147 \\ a - c = 152 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a + c = 152 \\ a - c = 147 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a + c = 249 \\ a - c = 207 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a + c = 207 \\ a - c = 249 \end{cases}$

5. La solución para el sistema de ecuaciones correcto, del punto anterior es:

□ $a = 2, c = 150$ □ $a = 150, c = 2$ □ $a = 228, c = 21$ □ $a = 21, c = 228$

6. El sistema de ecuaciones para el afelio y perihelio para el planeta Marte, son respectivamente:

□ $\begin{cases} a+c=147 \\ a-c=152 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a+c=152 \\ a-c=147 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a+c=249 \\ a-c=207 \end{cases}$ □ $\begin{cases} a+c=207 \\ a-c=249 \end{cases}$

7. La solución para el sistema de ecuaciones correcto, del punto anterior es:

□ $a=2, c=150$ □ $a=150, c=2$ □ $a=228, c=21$ □ $a=21, c=228$

8. Calcula la relación de los parámetros c y a, de cada planeta

Tierra	Marte
$\frac{c}{a}=$	$\frac{c}{a}=$

Sección 2: Excentricidad en la elipse

Abre en la carpeta *Actividad 2, el archivo* "EDVI-Excentricidad", y construye el trazo de varias elipse con el elipsógrafo. La longitud de la cuerda del elipsógrafo será de 20 unidades.
Recuerda que el eje mayor de la elipse mide lo mismo que la longitud de la cuerda, por lo tanto el semieje mayor de las elipse a trazar es de 10 unidades.

Para construir las elipses, lee y sigue los siguientes pasos:

a. Con el deslizador Semieje mayor a = 10, da clic sobre el punto y deslízalo hasta ubicar el valor en a =10. Esta magnitud se va a mantener fija**.** También puedes digitar dentro de la casilla en valor numérico+Enter.

b. Activa la casilla ☑ Activa Rastro de E y separa los focos F y F' 8 unidades es decir con un $c=4$ unidades.

c. Traza una elipse al mover el punto E lentamente, dando clic sobre éste y arrastrándolo con el mouse.

d. Realiza el trazo de 3 elipse más para: c=6, c=8 y por último c=9.5. Si desea borrar el rastro, se debe dar clic en el botón Borra Rastro

e. Observa cada elipse trazada y registra en la siguiente tabla los valores de c y a para cada una de ellas. Luego calcula el cociente entre c y la longitud del semieje menor a.

Elipse	**c**	**a**	**c/a**
1		10	
2		10	
3		10	
4		10	

Tabla 4. Registro de valores c y a para cada elipse

Responde a continuación, marcando solo una de las siguientes respuestas, con una palomita ☑

1. ¿Qué observas de la figura cada vez que c es más grande o se alejan los focos?

   □La elipse "se alarga o se hace más ovalada" □La elipse es más "redonda".

2. ¿Cómo varía el cociente c/a cada vez que se alejan los focos?

   □Se acerca más a la unidad (1) □Se acerca más a cero.

3. ¿Qué concluyes al respecto del cociente c/a respecto de la "redondez" de la elipse?

   □Entre mayor sea el cociente c/a, la elipse es más "redonda", y de lo contrario es más "ovalada"

   □Entre menor sea el cociente c/a la elipse es más "redonda", y de lo contrario es más "ovalada"

4. ¿Qué sucede si la distancia focal es cero, o sea si los focos están uno encima del otro? Borra el rastro de la última elipse. Acerca los focos de modo que uno quede encima del otro, para ello digita en la casilla de "Distancia del centro a los focos" la cantidad 0.001+Enter, y mueve lentamente el punto E con el mouse. ¿Qué observas de la elipse trazada?

   □La nueva elipse es tan "redonda" que se considera una circunferencia

   □La nueva elipse se "alarga" demasiado

5. ¿Bajo qué condición se considera que la circunferencia es una elipse?

____

____

____

Definición:
La excentricidad e de una elipse se define como el cociente de la longitud focal, entre la longitud del semieje mayor.

$$e = \frac{c}{a}$$

El parámetro e mide justamente la redondez de una elipse. Cómo c<a siempre, entonces:

$$0 < e = \frac{c}{a} < 1$$

Entre más pequeño sea el parámetro c, la elipse es más redonda y,
Entre más grande sea el parámetro c, la elipse es más achatada
Cuando c=0 la elipse es una circunferencia.

6. De acuerdo al valor de la excentricidad de los planetas Tierra y Marte calculada en la sección 1, ¿qué órbita elíptica es más "redonda" y cuál más "ovalada"? Explica tu respuesta

____
____
____
____

Ejercicios propuestos

1. Calcula la excentricidad para una elipse 1 cuyo eje mayor mide 10 cm y eje menor 6cm

   □ $e = \frac{10}{8}$ □ $e = \frac{3}{5}$ □ $e = \frac{4}{5}$ □Otra: ____________

2. Calcula la excentricidad para una elipse 2 cuyo eje menor mide 10 cm y la distancia focal es de 24cm.

   □ $e = \frac{10}{8}$ □ $e = \frac{3}{5}$ □ $e = \frac{4}{5}$ □Otra: ____________

3. De acuerdo con la definición de excentricidad, ¿cuál de las anteriores elipses es más "redonda"? ¿por qué? Marca con una palomita ☑ la respuesta que creas correcta.

   □La elipse 1 porque su excentricidad es mayor que la excentricidad de la elipse 2

   □La elipse 1 porque su excentricidad es menor que la excentricidad de la elipse 2

Anexo VIII. Actividad 3A. Demostración sintético-analítica de la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen

Nombre del estudiante: ____

Abre en la carpeta actividad 3, el archivo "EDVI-Elipse por medio del círculo osculador" y sigue continua con el desarrollo del presente cuestionario.

Sección 1: Trazo de la elipse por medio del círculo osculador en Geogebra

La construcción geométrica vista en Geogebra consta de dos circunferencias concéntricas a y b, con centro en el origen A, y con respectivos radios $\overline{AC} = a$ y $\overline{AD} = b$, como se aprecia en la siguiente figura:

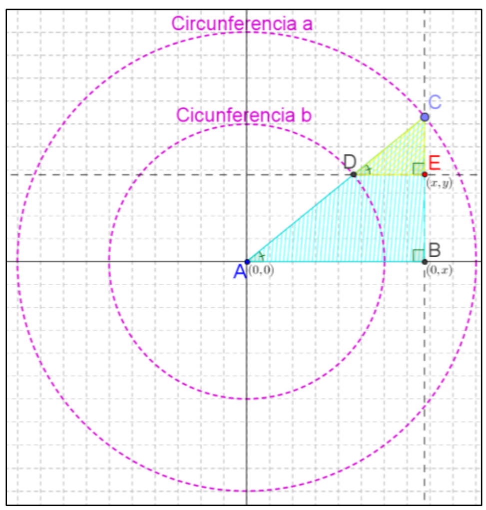


Figura 1. Circunferencias concéntricas a y b, y triángulos semejantes

Los triángulos ABC y DEC son rectángulos, y semejantes por el criterio de ángulo-ángulo debido a que cada triángulo comparte el mismo ángulo C, y un segundo ángulo de 90°. Entonces, gracias a la semejanza de triángulos podemos establecer proporciones entre sus catetos e hipotenusas respectivamente, así:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \text{ ó } \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \text{ ó } \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$

a) Sobre la aplicación de Geogebra, mueve lentamente el punto C, dando clic sobre éste y arrástralo por todo el contorno de la circunferencia a. ¿Qué figura forma el rastro rojo del punto E al mover el punto C?

- ☐ Una circunferencia
- ☐ Un óvalo
- ☐ Una elipse
- ☐ Un círculo

b) ¿Qué representa el radio de la circunferencia grande, respecto de la curva de trazo rojo?

- ☐ El radio de la figura del rastro rojo.
- ☐ La longitud del semieje mayor de la figura de rastro rojo que es una elipse.
- ☐ La longitud del semieje menor de la figura de rastro rojo que es una elipse.
- ☐ La distancia focal de la figura de rastro rojo que es una elipse.

c) ¿Qué representa el radio de la circunferencia chica, respecto de la curva de trazo rojo?

- ☐ El radio de la figura del rastro rojo.
- ☐ La longitud del semieje mayor de la figura de rastro rojo que es una elipse.
- ☐ La longitud del semieje menor de la figura de rastro rojo que es una elipse.
- ☐ La distancia focal de la figura de rastro rojo que es una elipse.

Sección 2: Demostración sintético-analítica de la ecuación canónica de la elipse

Sigue los pasos a continuación para demostrar la ecuación canónica algebraica, de la elipse:

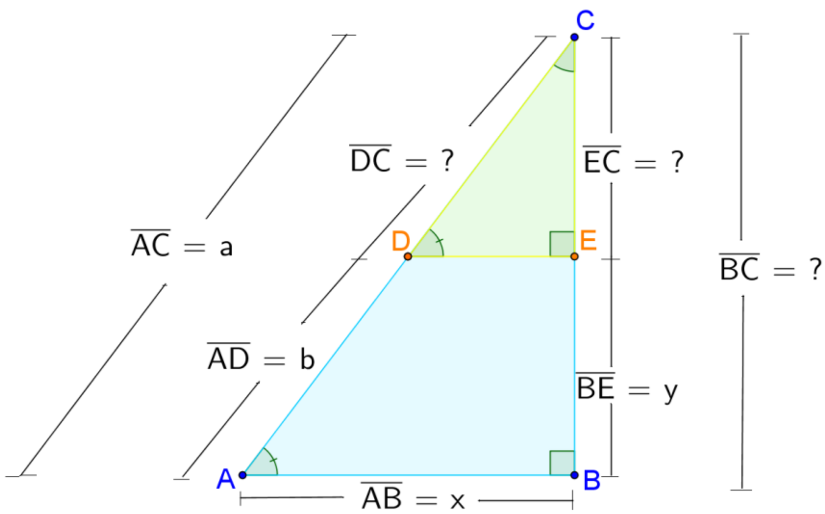
1. Activa la casilla “Triángulo ABC” y “Triángulo DEC”, y aparecerán dos triángulos rectángulos ABC y DEC.
2. Asignamos variables a los segmentos de los triángulos:

$\overline{AC} = a$

$\overline{DC} = b$

$\overline{AB} = x$

$\overline{BE} = y$



Semejanza de triángulos ABC y DEC

3. Escribe los términos correspondientes, la expresión para los siguientes segmentos. *Nota: Ten en cuenta la figura 2.*

$\overline{DC}$ =? =____________________ (en términos de a y b)

$\overline{BC}$ =? =____________________ (en términos de a & x, utilizar teorema de Pitágoras)

$\overline{EC}$ =? =_______________________________ (en términos de a, x, y; pista: El cateto EC es la diferencia entre el cateto BC y el segmento BE)

4. Utilizando la semejanza de triángulos, establece la siguiente proporción, sustituyendo los valores algebraicos obtenidos en los incisos 2 y 3.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Marca con una palomina sobre el recuadro la respuesta que consideres correcta:

5. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones, se obtiene a partir de la proporción del inciso 4? Recomendación: Utiliza la expresión $\overline{AC} * \overline{EC} = \overline{BC} * \overline{DC}$

   ☐ $a(y) = (a-b)(\sqrt{a^2 - x^2}$

   ☐ $a\left(\sqrt{a^2 - x^2} - y\right) = (b-a)\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)$

   ☐ $a\left(\sqrt{a^2 - x^2} - y\right) = (a-b)\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)$

6. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones se obtiene al simplificar la ecuación correcta del inciso 5?

   ☐ $-ay = b\sqrt{a^2 - x^2}$

   ☐ $a^2 y^2 = b^2 a^2 - b^2 x^2$

   ☐ $-a^2 y^2 = -ba^2 + bx^2$

7. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones se obtiene al simplificar la ecuación correcta del inciso 6, si esta es dividida entre $a^2 b^2$?

   ☐ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

   ☐ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

   ☐ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

8. Comprueba con los demás compañeros tu respuesta, y luego redacta con ayuda del profesor, las características de la ecuación canónica de la elipse.

____

____

____

____

____

Retroalimentación:

La ecuación canónica para una elipse con centro en el origen, y ejes paralelos a los ejes cartesianos es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Por ejemplo si la elipse tuviera como semieje mayor a=10 unidades, y un semieje menor b=8 unidades, entonces su ecuación canónica se obtendría de sustituir dichos valores numéricos en el modelo, es decir su ecuación es: $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

La operación inversa consiste en dar la ecuación, y hallar los elementos, por ejemplo: ¿Cuál es la longitud del eje mayor, eje menor y distancia focal, de una elipse que es modelada por la ecuación $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

Solución: La ecuación $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, por lo tanto:

$a^2=36 \Rightarrow \sqrt{a^2}=\sqrt{36} \Rightarrow a=6$

$b^2=20 \Rightarrow \sqrt{b^2}=\sqrt{20} \Rightarrow b=2\sqrt{5}$

Utilizando la relación pitagórica $c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{36-20}=4$

Por lo tanto:

La longitud del eje mayor es igual a $2a=12$

La longitud del eje menor es igual a $2b=4\sqrt{5}$

La longitud de la distancia focal es $2c=8$

Centro $(0,0)$, entonces:

Coordenadas de los vértices: $V(-6,0); V'(6,0)$

Coordenadas de los focos: $F(-4,0); F'(4,0)$

Anexo IX. Actividad 3B. Ecuación canónica y general de la elipse con centro en el origen

Nombre del estudiante: ____

1. *Sección 1: Interpretación gráfica de la elipse a partir de sus elementos.*

Marca con una palomita la respuesta correcta, en los ítems 1 al 4

1. Utilizando el modelo de la ecuación canónica de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, demostrado en la actividad anterior, ¿cuál de las siguientes ecuaciones, representa una elipse con longitud del eje mayor de 10 unidades y eje menor de 6 unidades?

   - ☐ $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$
   - ☐ $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$
   - ☐ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

2. ¿Cuál de las siguientes, es la magnitud de la distancia del centro de la elipse a uno de los focos F o F' de la anterior elipse?. Utiliza la relación pitagórica $a^2=b^2+c^2$ para calcularla.

   - ☐ $c=34$
   - ☐ $c=16$
   - ☐ $c=4$

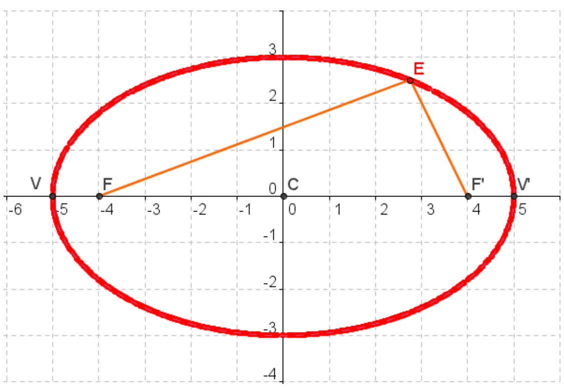
3. ¿Cuáles de las siguientes son las coordenadas de los focos F', F y vértices V', V, de la anterior elipse?: (*Recomendación:* utiliza respectivamente las fórmulas $F(-c,0);F'(c,0)$ y $V(-a,0);V'(a,0)$ para hallarlas)

   - ☐ $F(-4,0)$ y F'(4,0) ; V(-5,0) y V'(5,0)
   - ☐ $F(0,-4)$ y F'(0,4) ; V(0,-5) y V'(0,5)
   - ☐ F(-16,0) y F'(16,0) ; $V(-25,0)$ y V'(25,0)

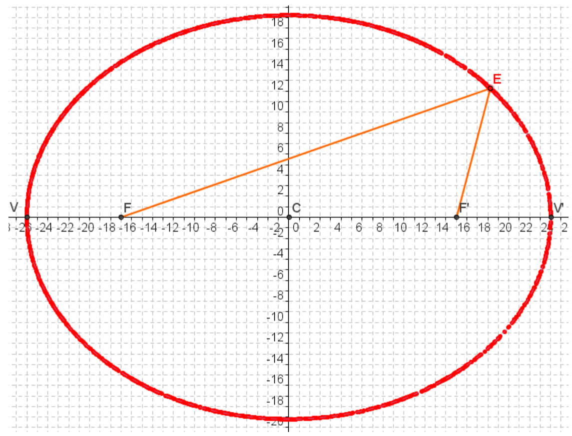
4. Abre en la carpeta *Actividad 3*, el archivo "EDVI-*Elipsógrafo"*, y con el elipsógrafo, simula el trazo de la elipse que describe la ecuación del punto 1,

digitando en el centro h=0, k=0, y los valores del “a” y “c” respectivos. ¿Cuál de las siguientes gráficas es similar a la que trazaste en Geogebra?

☐



☐



Activa en Geogebra la casilla ☑ **Comprueba**, y compara la ecuación mostrada en la parte superior de la pantalla con la ecuación del ítem 1 de la presente sección, verificando así tus resultados.

2. Sección 2: Ecuación Canónica de la elipse de la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Si la ecuación fuese $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\underline{25}}=1$**,** se observa que el denominador de mayor cantidad se encuentra debajo de la y^2. Recordando que el parámetro “a” es mayor que “b”, se observa que hubo un cambio de posición ellos, de modo que la ecuación canónica es de la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, de donde:

$$\begin{matrix} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$$

A diferencia de la ecuación dada en el punto 1., el parámetro de “a^2” está debajo de la variable **y**, lo que quiere decir que el eje mayor está ahora sobre la ordenada (eje y) y por lo tanto la **elipse es vertical**. De lo contrario si el coeficiente a^2 está debajo de la x^2 entonces la elipse es horizontal.

En el “EDVI-Elipsógrafo”, grafica la elipse que modela la ecuación gira el elipsógrafo por medio del deslizador 

moviendo el punto hacia la derecha 

. Luego digita el centro h=0, k=0, y los parámetros $a = 5$ y $c = 4$.

Activa el *rastro E* y mueve el punto E, para así graficar la elipse. Bosqueja la gráfica en el siguiente recuadro, y redacta las características de la curva de manera grupal

Características:

3. *Sección 3: Ecuación general de la elipse.*

Lee y estudia con el profesor los siguientes pasos que describen el proceso algebraico de pasar de la ecuación canónica de la elipse a la ecuación general, y viceversa.

De la ecuación canónica a la general	De la ecuación general a la canónica
1. De la ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, halla el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de los denominadores. Entonces m.c.m. (25 y 9) = 225 2. Resuelve la fracción algebraica: $\frac{9x^2+25y^2}{225}=1$ 3. Como el m.cm. está dividiendo pásalo a multiplicar al otro lado de la ecuación. Posteriormente iguala a cero la ecuación. $9x^2+25y^2=1*225$ $\underbrace{9x^2+25y^2-225=0}_{\text{Ecuación general de la elipse}}$ $Ax^2+Cy^2+F=0$ ***La ecuación general de la elipse con centro en el origen es de la forma:*** $Ax^2+Cy^2+F=0$ ***donde A, C y F son coeficientes.***	1. Dada la siguiente ecuación general de la elipse: $9x^2+25y^2-225=0$, pasamos los coeficientes independientes a un lado de la igualdad: $9x^2+25y^2=225$ 2. Dividimos ambos miembros de la igualdad entre el coeficiente independiente (en este caso es 225): $\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225}$ $\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1$ 3. Aplicando la ley de producto de extremos por producto de medios: $\frac{x^2}{\frac{225}{9}}+\frac{y^2}{\frac{225}{25}}=1$ 4. Al simplificar la anterior expresión se obtiene la ecuación canónica de la elipse: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

4. Sección 4: Ejercicio en clase

Marca con una palomita la respuesta correcta de los ítems 1 al 9.

1. Dada la ecuación $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$, ¿qué vale la longitud del semieje mayor, y la longitud del semieje menor b?

☐ a=36, b=100

☐ a=100, b=36

☐ a=10, b=6

☐ a=6, b=10

2. Calcula el parámetro c o distancia focal, por medio de la relación pitagórica. El valor es:

☐ c=64

☐ c=136

☐ c=16

☐ c=8

3. ¿Qué forma tiene la elipse?

☐ horizontal

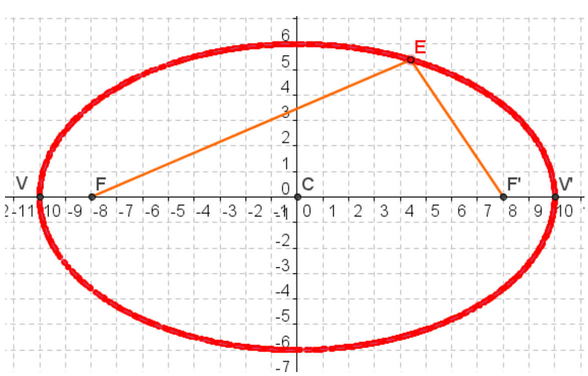
☐ vertical

¿Por qué____

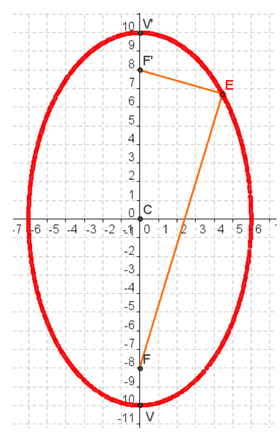
____

4. Al trazar la curva en el EDVI-Elipsógrafo, ¿cuál de las siguientes gráficas obtienes?

☐



☐



Activa en Geogebra la casilla ☑ Comprueba, y compara la ecuación mostrada en la parte superior de la pantalla con la ecuación del ítem 1 de la presente sección, verificando así tus resultados.

5. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la ecuación general de la elipse anterior? *Nota:* sigue el procedimiento descrito en la sección 3 para obtenerla, y escribe el proceso en un ahoja en blanco.
   - ☐ $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$
   - ☐ $25x^2 + 16y^2 + 400 = 0$
   - ☐ $16x^2 + 25y^2 - 3600 = 0$
6. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones, representa la ecuación canónica de la elipse, obtenida a partir de ecuación general $3x^2 + 10y^2 - 30 = 0$?
   - ☐ $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{3} = 1$
   - ☐ $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$
   - ☐ $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{10} = 1$
7. ¿Cuál es la magnitud de los parámetros de la elipse del ítem 6?
   - ☐ $a = 100, b = 9, c = \sqrt{91}$
   - ☐ $a = 10, b = 3, c = \sqrt{7}$
   - ☐ $a = \sqrt{10}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{7}$
8. ¿Qué forma tiene la ecuación de la elipse, del inciso 6?
   - ☐ Horizontal
   - ☐ Vertical
9. Bosqueja la gráfica de la elipse con ayuda del EDVI-Elipsógrafo a partir de la ecuación obtenida en el ítem 6, y la extracción de sus parámetros.

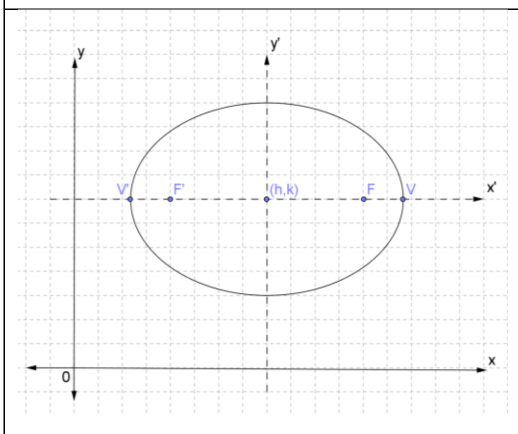
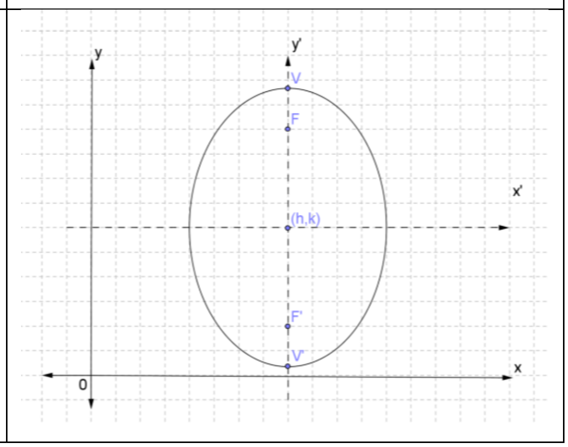
Anexo X. Actividad 3C. Ecuación canónica y general de la elipse con centro (h,k)

Nombre del estudiante: ____

Sección 1: Traslación de ejes coordenados

Participa con el profesor sobre la información del siguiente recuadro:

Supongamos que se tiene una elipse con centro en el punto (h,k) fuera del origen.

Elipse horizontal	**Elipse Vertical**
	

Si trazamos ejes auxiliares x' y y' con origen en el punto (h,k), la ecuación de esta elipse será $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$, pero por la traslación del sistema coordenado xy, al $x'y'$, queda así:

$$x' = x-h$$
$$y' = y-k$$

En consecuencia la ecuación $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$, se trasforma en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{con} \begin{cases} \text{Vértices } V(h-a,k) \text{ y } V'(h+a,k) \\ \text{Focos } F(h-c,k) \text{ y } F'(h+c,k) \end{cases}$$

La anterior ecuación es para una elipse con eje focal paralelo al eje x (elipse horizontal)

Si la ecuación es de la forma:

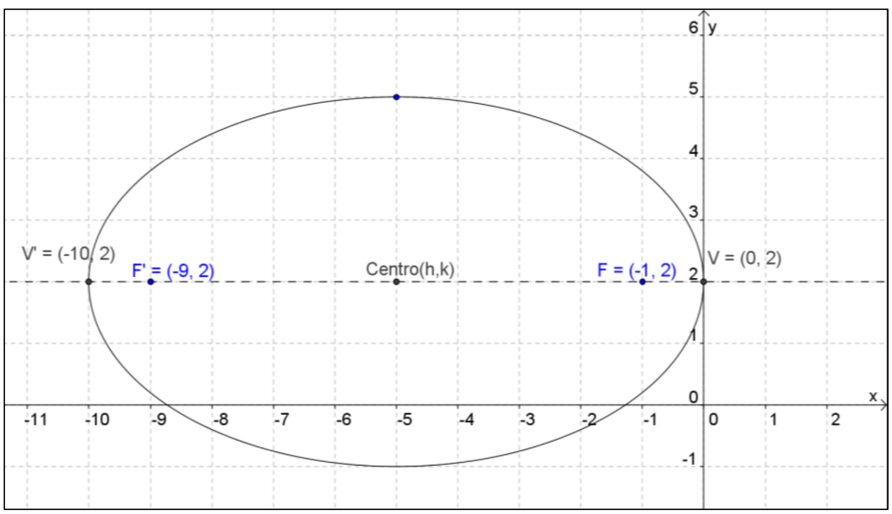
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \qquad \begin{cases} \text{Vértices } V'(h,k+a) \text{ y } V'(h,k-a) \\ \text{Focos } F(h,k+c) \text{ y } F'(h,k-c) \end{cases}$$

La anterior ecuación es para una elipse con eje focal paralelo al eje y (elipse vertical)

Sección 2: Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) a partir de su gráfica.

Utilizando el modelo de la ecuación canónica de la elipse, estudiado en la sección 1, responde a continuación marcando con una palomita la respuesta correcta. Escribe los procesos algebraicos en una hoja en blanco:

Dada la siguiente gráfica:



1. ¿Cuál es el valor de la abscisa h, y ordenada k, del centro de la elipse
   - ☐ $h=2, k=5$
   - ☐ $h=-2, k=-5$
   - ☐ $h=5, k=2$
   - ☐ $h=-5, k=2$

2. ¿Cuánto vale la longitud del semieje mayor y la distancia del centro a uno de los focos? (sugerencia: Utiliza la fórmula de distancia entre dos puntos $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ para calcularlas)

   ☐ $a=10, c=8$

   ☐ $a=8, c=10$

   ☐ $a=5, c=4$

3. ¿Cuál es la magnitud del semieje menor? (Sugerencia: Utiliza $a^2=b^2+c^2$)

   ☐ $b=6$

   ☐ $b=3$

   ☐ $b=9$

4. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones modela la elipse de la gráfica? (*Recomendación :Sustituye los parámetros a, b, calculados en los incisos 2 y 3, en el modelo correspondiente de la ecuación canónica de la elipse estudiada en la sección 1)*

   ☐ $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

   ☐ $\frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

   ☐ $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

   ☐ $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

Sección 3: Ecuación general de la elipse con centro (h, k)

Lee y estudia con el profesor los siguientes pasos que describen el proceso algebraico, de pasar de la ecuación canónica de la elipse con centro (h,k) a su respectiva ecuación general, y viceversa.

De la ecuación canónica a la general	De la ecuación general a la canónica
5. De la ecuación $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$, halla el m.c.d. (mínimo común denominador) Entonces $m.c.d(9,25)=225$ 6. Resuelve la fracción algebraica, multiplicando la ecuación por el m.c.d: $\left(\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}\right)*225=1*225$ $225*\frac{(x+5)^2}{9}+225*\frac{(y-2)^2}{25}=225$ 7. Simplificamos la anterior ecuación, y resolviendo los productos notables, obtenemos: $25\left(x^2+10x+25\right)+9(y^2-4y+4)=225$ 8. Aplicando la ley distributiva de la multiplicación e igualando a cero, obtenemos $25x^2+250x+625+9y^2-36y+36=225$ 9. Reduciendo términos semejantes, obtenemos: $25x^2+9y^2+250x-36y=-436$ 10. Igualando a cero, la anterior ecuación, se obtiene: $\underbrace{25x^2+9y^2+250x-36y+436=0}_{\text{Ecuación general de la elipse}}$ $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	5. Dada ecuación general de la elipse: $25x^2+9y^2+250x-36y+436=0$, pasamos los coeficientes independientes a un lado de la igualdad: $25x^2+9y^2+250x-36y=-436$ 6. Agrupamos juntos los términos que contengan x, y los de y. $(25x^2+250x)+(9y^2-36y)=-436$ 7. Factorizamos el coeficiente de las x^2 y y^2 : $25(x^2+10x)+9(y^2-4y)=-436$ 8. Completamos el trinomio cuadrado perfecto de (x^2+10x) y de (y^2-4y) Para ello suma la mitad de cada segundo término elevado al cuadrado Para $x^2+10x\rightarrow x^2+10x+\left(\frac{10}{2}\right)^2=x^2+10x+25$ Para $y^2-4y\rightarrow y^2-4y+\left(\frac{4}{2}\right)^2=y^2-4y+4$ 9. Pero como se suma un 25*25 y un 4*9 aun lado d ela igualdad, también se debe sumar al otro lado de la igualdad: $25\left(x^2+10x+25\right)+9\left(y^2-4y+4\right)=-436+(25*25)+(9*4)$

La ecuación general de la elipse con centro (h,k) ***es de la forma:***

$\mathrm{A}x^2 + Cy^2 + Dx - Ey + F = 0$ ***donde A, C, D, E y F son coeficientes.*** *Siendo A y C del mismo signo.*

Para la ecuación:

$$25x^2 + 9y^2 + 250x - 36y + 436 = 0$$

$A = 25$

$C = 9$

$D = 250$

$E = -36$

$F = 436$

10. Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos: $\left(x^2 + 10x + 25\right) = \left(x^2 + 5\right)^2$; $\left(y^2 - 4y + 4\right) = \left(y - 2\right)^2$

$$\Rightarrow 25\left(x+5\right)^2 + 9\left(y-2\right)^2 = 225$$

11. Dividimos la ecuación entre el coeficiente independiente (225):

$$\frac{25\left(x+5\right)^2}{225} + \frac{\left(y-2\right)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

12. Aplicando ley de producto de extremos, producto de medios:

$$\frac{\left(x+5\right)^2}{\frac{225}{25}} + \frac{\left(y-2\right)^2}{\frac{225}{9}} = 1$$

13. Simplificando:

$$\underbrace{\frac{\left(x+5\right)^2}{9} + \frac{\left(y-2\right)^2}{25} = 1}_{\text{Ecuación canónica de la elipse con centro (h,k)}}$$

Escribe qué características tiene la ecuación general de la elipse. Discute tus respuestas con los compañeros y el profesor:

Sección 4: Extracción de parámetros y gráfica de la elipse con centro (h, k), a partir de su ecuación canónica

Dada la ecuación $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$, responde a las siguientes preguntas:

1. Compara la anterior ecuación con los modelos de la elipse horizontal y vertical.

   Según el modelo comparado. ¿Qué forma tiene la elipse?

   ☐ Horizontal

   ☐ Vertical

Explica tu respuesta: ____

____

2. ¿Cuáles son los respectivos valores de los parámetros a, b, c, para la elipse que describe la ecuación?

   ☐ $a=5$, b=3, c=4

   ☐ $a=25$, b=9, c=16

   ☐ $a=9$, b=25, c=34

3. ¿Cuáles son las coordenadas del centro (h, k)?

   ☐ $h=5; k=-2$

   ☐ $h=-5; k=2$

   ☐ $h=2; k=-5$

   ☐ $h=-2; k=5$

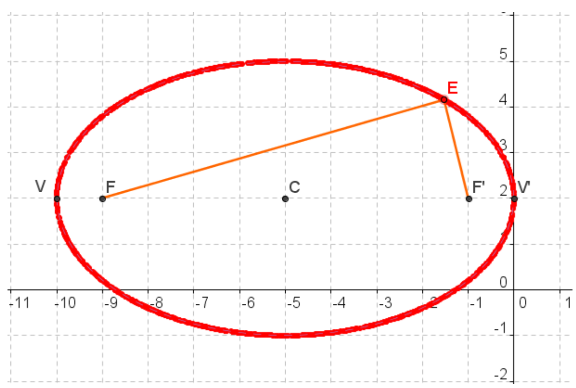
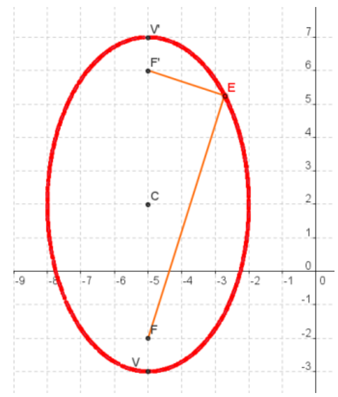
4. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices y focos?

   ☐ $V(-5,-3), V'(-5,7)$ y $F(-5,-2), F'(-5,6)$

   ☐ $V'(-3,-5), V(7,-5)$ y $F'(-2,-5), F(6,-5)$

   ☐ $V'(5,-3), V(5,7)$ y $F'(5,-2), F(5,6)$

5. Abre en la capeta *Actividad 3*, el EDVI-Elipsógrafo, y grafica la elipse que modela la ecuación $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$. Para ello digita los parámetros a, c y coordenadas del centro (h, k) que obtuviste en los ítems 2 y 3 de la presente sección. Si la elipse es vertical Gira el elipsógrafo. ¿Cuál de las siguientes gráficas obtuviste? Verifica que la ecuación corresponda a la gráfica activando la casilla comprueba.

☐ 	☐ 

Anexo XI. Postest

Nombre del estudiante: ____

Se va a remodelar el conjunto residencial Villas de Chalco, con la construcción de un gran jardín y una alberca en forma de elipse. Para construir el jardín contratan un jardinero, y le piden construir el mayor jardín elíptico que se pueda inscribir en la zona verde rectangular de 20 x 12 m.

Para la construcción de la alberca se contrató un ingeniero el cual calculó que la posición de ésta obedece a la ecuación $25x^2 + 16y^2 - 300x + 256y + 1524 = 0$

1. Abre en carpeta *Postest,* el EDVI-El jardinero y el ingeniero" y dibuja la mayor elipse (jardín) que se pueda inscribir sobre el rectángulo verde. Para ello, ubica el centro del elipsógrafo en todo el centro de la zona rectangular. ¿Cuáles son los valores de las coordenadas para el centro del jardín elíptico?

   □ $h = 8, k = -12$ □ $h = -12, k = 8$ □ $h = -8, k = 12$ □ $h = -12, k = -8$

2. ¿Cuál es la longitud del semieje mayor y menor de la elipse trazada por el jardinero?

   □ $a = 20, b = 12$ □ $a = 12, b = 20$ □ $a = 6, b = 10$ □ $a = 10, b = 6$

3. ¿Cuál es la longitud de la semi-distancia focal?(para calcularla utiliza la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$)

   □ $c = 16$ □ $c = 4$ □ $c = 64$ □ $c = 8$

4. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones canónicas, modela la elipse del jardín elíptico?

   □ $\frac{(x+12)^2}{36} + \frac{(y-8)^2}{100} = 1$

   □ $\frac{(x-12)^2}{100} + \frac{(y+8)^2}{36} = 1$

   □ $\frac{(x+12)^2}{100} + \frac{(y-8)^2}{36} = 1$

☐ $\frac{(x-12)^2}{36}+\frac{(y+8)^2}{100}=1$

5. ¿La elipse es horizontal o vertical? Explica tu respuesta

____

____

____

6. Calcula la excentricidad del jardín elíptico, y marca con una palomita la opción correcta.

☐ $e=\frac{4}{5}$ ☐ $e=\frac{3}{5}$ ☐ $e=\frac{5}{4}$ ☐ $e=\frac{5}{3}$

7. Si la ecuación hallada por el ingeniero para la alberca en forma de elipse fue $25x^2+16y^2-300x+256y+1524=0$. Describe las características que explique por qué es la ecuación general de una elipse.

*Características del porque es la ecuación general de una elipse:*____

____

____

____

Para la anterior ecuación, realiza el procedimiento algebraico que permita llegar de la ecuación general a la canónica de dicha elipse, y marca con una palomita la respuesta correcta:

☐ $\frac{(x+6)^2}{16}+\frac{(y-8)^2}{25}=1$

☐ $\frac{(x-6)^2}{25}+\frac{(y+8)^2}{16}=1$

☐ $\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y+8)^2}{25}=1$

☐ $\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y+8)^2}{16}=1$

Procedimiento para llegar a la ecuación canónica:

8. ¿Cuáles son los valores de las coordenadas para el centro, de la alberca elíptica?

   □ $h=6, k=-8$ □ $h=-6, k=8$ □ $h=8, k=-6$ □ $h=-8, k=6$

9. ¿Cuál es la longitud del semieje mayor y menor de la elipse trazada?

□ $a=16, b=25$ □ $a=256, b=625$ □ $a=4, b=5$ □ $a=5, b=4$

10. ¿Cuál es la longitud de la semi-distancia focal?(para calcularla utiliza la relación pitagórica $a^2=b^2+c^2$)

□ $c=9$ □ $c=34$ □ $c=3$ □ $c=1$

11. ¿La elipse es horizontal o vertical? Explica tu respuesta

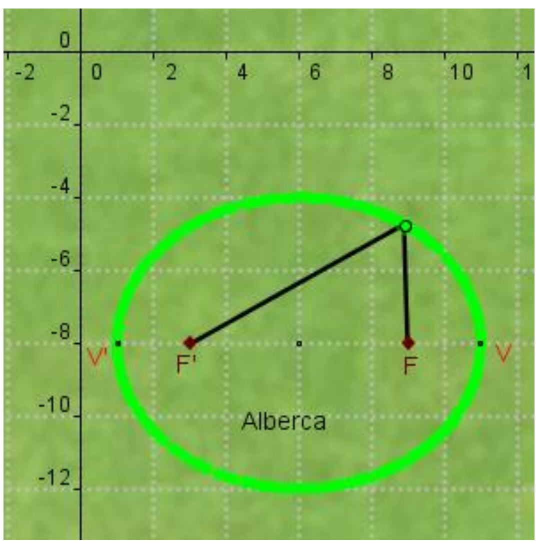
____

____

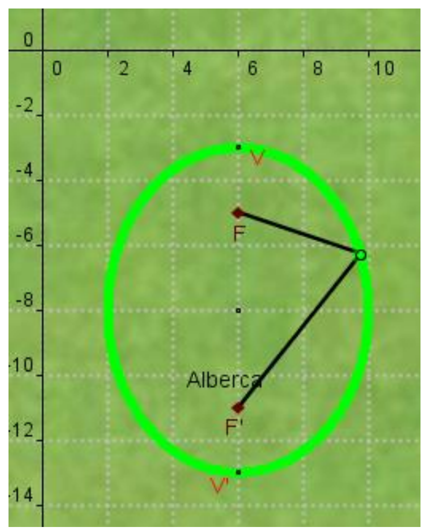
____

12. Construye con el elipsógrafo en GeoGebra la alberca en forma de elipse, utilizando las respuestas a las preguntas 8, 9 y 10. ¿Cuál de las siguientes figuras representa alberca en forma de elipse construida por el ingeniero?

□



□



13. Calcula la excentricidad de la alberca elíptica, y marca con una palomita la opción correcta.

□ $e=\frac{4}{5}$ □ $e=\frac{3}{5}$ □ $e=\frac{5}{4}$ □ $e=\frac{5}{3}$

14. ¿Cuál de las dos elipses es más redonda, la del jardín o la alberca? Explica tu respuesta.

____

____

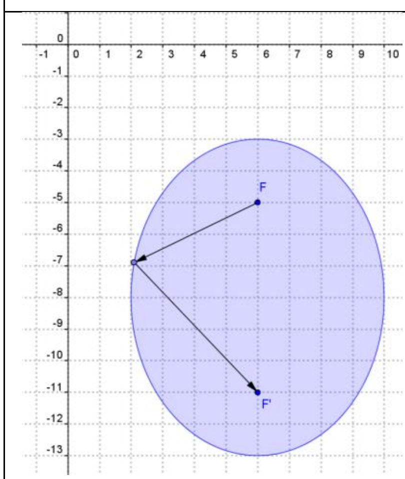
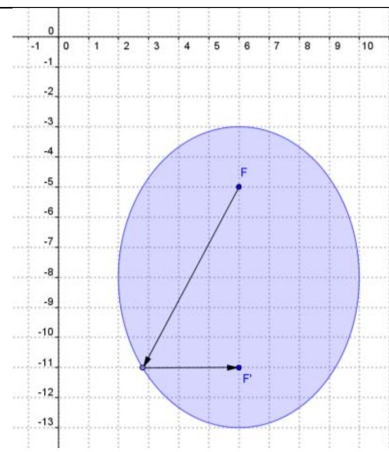
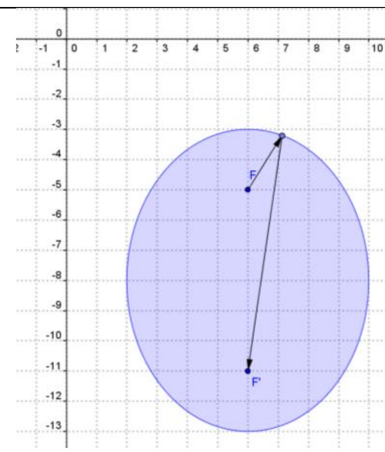
____

15. Las coordenadas de los focos y vértices de la elipse de la alberca son:

□ F'(6,−5) y F(6,-11); V'(6,-3) y V(6,-13) □ F(−5,6) y F'(-11,6); V(-3,6) y V'(-13,6)

□ F(6,−4) y F'(6,-12); V(6,-3) y V'(6,-13) □ F(6,−3) y F'(6,-13); V(6,-5) y V'(6,-11)

16. Gina, Héctor y Alfredo realizan una competencia en la alberca elíptica, que consiste en partir nadando de un foco de la elipse, tocar luego un punto cualquiera sobre la misma y por último llegar nadando al otro foco. Todos toman trayectorias diferentes como se muestra en las siguientes figuras:

Alfredo	Gina	Héctor
		

Al final de la competencia ganó Gina, sin embargo Alfredo argumenta que no es justo porque el recorrió más distancia que Gina, Héctor argumenta que la mayor distancia la recorrió él mismo, porque dio vuelta hacia atrás y luego se dirigió al otro foco. Sin embargo Gina dice que fue justo porque todos recorrieron la misma distancia en diferentes trayectorias. ¿Quién tiene la razón? Explica tu respuesta