



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

**El uso de distintas representaciones del fenómeno aceleración  
promueve el cambio conceptual**

Tesis que presenta

**Alfredo Martínez Uribe**

Para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa

Directores de tesis:

Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier

Dr. François Pluinage

México, D.F.

Abril, 2014



Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico que me ha otorgado para cursar la Maestría en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Apoyo que me ha permitido culminar con la realización del presente trabajo de tesis. No de Becario: 262785



## Agradecimientos

Al Universo y su armonía, porque juntos han permitido que en tanto tiempo reconociera lo que mucho me interesa la educación y en tan poco naciera mi hija y culminara mis estudios de posgrado.

Al Cinvestav por recibirme en sus instalaciones y brindar a los estudiantes espacios tan agradables y eficientes para la realización de nuestro trabajo académico.

Al Área de Tecnologías Digitales en Educación Matemática del departamento de Matemática Educativa, por su confianza para considerarme un integrante apto para el programa de maestría.

A la Dra. Olimpia Figueras por su dirección, apoyo, tiempo y dedicación durante la realización de esta tesis.

Al Dr. Dr. François Pluinage por su vasto conocimiento y sobre todo por compartir un poquito con el autor de esta tesis.

Al Dr. Gonzalo Zubieta por su sencillez, cordialidad y dominio en la enseñanza de la geometría.

Al Dr. Hugo Mejía por enseñarnos algunos principios de programación de forma amigable.

A la Dra. Teresa Rojano por haberme permitido explorar con ella algunos temas de investigación.

A los compañeros de la maestría por su apoyo y compañía, en especial a Freddy por ayudarme a estudiar tan desinteresadamente.

A mi esposa por su paciencia y tolerancia, lo que nos permite seguir adelante cada día.

A mis padres que siempre me han apoyado y motivado.

A mi hermana Leo por siempre darme confianza y estar más segura que yo de mi capacidad.

Al Ray por insistir, aunque se le diga que ya no insista.

Al Señor Roberto Torres Márquez por su motivación y admiración, por compartir sus materiales tan valiosos para la enseñanza de las ciencias conmigo, por su sencillez y amistad.



*Dedicatoria*

*Dedico este trabajo a mi familia, mi esposa Margarita que siempre me ha apoyado en mis intentos a pesar de tener que sacrificar nuestro tiempo y a mi niña Elisa que me llena las venas todos los días de alegría y razón de vivir.*

*A mis padres por su tenacidad para sobreponerse tantas veces y de tantas formas distintas a la adversidad*



# Índice

Agradecimientos .....	v
Índice .....	ix
Lista de Figuras .....	xiii
Lista de Tablas .....	xvii
Resumen .....	xix
Abstract.....	xxi
Introducción.....	1
Capítulo 1 .....	3
1.1 Planteamiento del problema .....	3
1.2 Las primeras ideas sobre movimiento .....	5
1.3 El problema de investigación .....	7
1.4 Preguntas y objetivos de investigación.....	8
Capítulo 2 .....	11
2.1 Ideas previas en la enseñanza de la ciencia .....	11
2.1.1 Orígenes y características de las ideas previas .....	12
2.1.2 Ideas previas sobre la velocidad y la aceleración .....	13
2.2 Cambio conceptual y de representación .....	15
2.3 Representaciones semióticas .....	16
2.4 Modelización .....	19
2.5 Modelo de enseñanza .....	21
Capítulo 3 .....	25
3.1 Modelo de enseñanza de las ciencias y enfoque actual de la educación básica .....	25
3.2 Programa de estudios de ciencias II (énfasis en física) .....	26
3.3 Ubicación del tema de aceleración dentro del programa de estudios de ciencias II .....	27
3.4 ¿Cómo se estudia el tema de aceleración en un libro de texto? .....	28
3.5 Reflexiones sobre la enseñanza del tema de aceleración .....	29
3.6 Diseño de la Secuencia de Actividades .....	32
3.6.1 Primera Fase: percepción del fenómeno e identificación de variables.....	33
3.6.2 Segunda Fase: Tiempo versus Distancia .....	35

3.6.2.1	Primera Validación.....	36
3.6.2.2	Segunda Validación.....	37
3.6.2.3	Tercera Validación .....	40
3.6.2.4	Repaso: Rapidez .....	43
3.6.4.5	Rapidez media .....	46
3.6.2.5	Media ponderada .....	47
3.6.3	Tercera Fase: Modelización.....	47
Capítulo 4	.....	51
4.1	Pretest .....	54
4.1.1	Ideas previas, bloque 1 del pretest.....	54
4.1.1.1	Análisis previo, Bloque 1, pretest.....	55
4.1.1.2	Análisis posterior, Bloque 1 .....	57
4.1.2	Coordinación de registros, bloque 2 del pretest .....	59
4.1.2.2	Análisis posterior, Bloque 2 .....	61
4.1.3	Interpretación del fenómeno, bloque 3 del pretest.....	62
4.1.3.1	Análisis previo, Bloque 3, Pretest .....	63
4.1.3.2	Análisis posterior, Bloque 3 .....	63
4.2	Postest.....	67
4.2.1	Coordinación de registros, bloque 1 del Postest.....	68
4.2.1.2	Análisis posterior, bloque 1 del Postest.....	69
4.2.2	Interpretación deductiva, bloque 2 del Postest .....	69
4.2.2.1	Análisis previo, Bloque2, Postest .....	69
4.2.2.2	Análisis posterior, Bloque 2, Postest .....	69
4.2.3	Coordinación de registros y tratamiento algebraico, Bloque 3 del Postest .....	71
4.2.3.1	Análisis previo, Bloque 3, Postest .....	71
4.2.3.2	Análisis posterior, Bloque 3, Postest .....	71
Capítulo 5	.....	73
5.1	Resultados de la aplicación de las secuencias didácticas .....	73
5.2	Primera fase. Percepción del fenómeno e identificación de variables. ....	74
5.3	Segunda Fase. Tiempo versus distancia .....	78
5.3.1	Repaso: Rapidez .....	83

5.3.2 Rapidez Media.....	100
5.3.3 Media ponderada .....	104
5.4 Tercera Fase. Modelización.....	105
5.5 Embodiment .....	108
Capítulo 6 .....	117
6.1 Reflexiones sobre la aplicación del pretest .....	117
6.2 Reflexiones sobre la aplicación del postest .....	117
6.3 Reflexiones sobre la aplicación de la propuesta didáctica .....	118
6.4 Reflexiones sobre la evaluación usando el embodiment.....	119
6.5 Reflexiones sobre el modelo de enseñanza propuesto .....	119
6.6 Algunas respuestas a las preguntas de investigación .....	120
Referencias bibliográficas .....	123
Referencias electrónicas .....	125



## Lista de Figuras

Figura 2.2.1 Analogía del cambio conceptual (Tomada de Bello, 2004).....	16
Figura 2.2 Interpretación inductiva (Touma, 2009, modificado) .....	18
Figura 2.3 Interpretación deductiva (Touma, 2009, modificado).....	19
Figura 2.4 Fases principales del proceso de modelización en el pensamiento científico.....	20
Figura 2.5 Modelización matemática de fenómenos científicos (Touma, 2009) .....	21
Figura 3.1 Configuración del sistema: plano inclinado.....	34
Figura 3.2 Primera validación de la Hoja de trabajo de la segunda fase. Experimentación.....	36
Figura 3.3 Primera validación de la Hoja de trabajo de la segunda fase. Guía de observación sobre la distribución de las distancias recorridas por el balón. ....	37
Figura 3.4 Segunda validación. Hoja de trabajo de la segunda fase. Preguntas 1 y 2.....	37
Figura 3.5 Segunda validación. Hoja de trabajo, segunda fase. Instrucciones e inciso a) .....	38
Figura 3.6 Segunda validación de la Hoja de trabajo de la segunda fase. Incisos b) a f).....	39
Figura 3.7 Regularidad. Estrategia didáctica.....	40
Figura 3.8 Modificaciones a la Experiencia de la segunda fase, tercera validación. ....	40
Figura 3.9 Inciso b) de la experiencia de la segunda fase, tercera validación.....	41
Figura 3.10 Respuesta a la pregunta del inciso c) .....	41
Figura 3.11 Registro de datos en una tabla, tercera validación .....	42
Figura 4.1 Esquema del diseño de la metodología de investigación .....	53
Figura 4.2 Pregunta sobre ideas previas del concepto aceleración.....	54
Figura 4.3 Interpretación del fenómeno .....	63
Figura 4.4 Coordinación de registros, bloque 1 del Postest .....	68
Figura 4.5 Interpretación deductiva, bloque 2 del Postest.....	70
Figura 4.6 Coordinación de registros y tratamiento algebraico, Bloque 3 del Postest.....	71
Figura 4.7 Tratamiento algebraico.....	72
Figura 5.1 Daniel, pág. 1, pregunta 1 .....	75
Figura 5.2 Daniela, pág. 1, pregunta 2.....	75
Figura 5.3 Daniel, pág. 1, pregunta 2 .....	76
Figura 5.4 Fernando, pág. 1, pregunta 3.....	76
Figura 5.5 Daniela, pág. 1, pregunta 3.....	76

Figura 5.6 Daniel, pág. 2 .....	77
Figura 5.7 Fernando, pág. 2, discusión.....	77
Figura 5.8 Daniel, pág. 2, discusión .....	77
Figura 5.9 Adrián, pág. 5.....	78
Figura 5.10 Fernando, pág. 6.....	79
Figura 5.11 Claudia, pág. 7 .....	82
Figura 5.12 Daniela, pág. 8.....	82
Figura 5.13 Daniela, pág. 9.....	83
Figura 5.14 Alfredo, pág 10 .....	84
Figura 5.15 Fernando, aula de medios.....	84
Figura 5.16 Adrián, pág. 12.....	85
Figura 5.17 Daniela, pág. 14.....	85
Figura 5.18 Claudia, pág. 15 .....	86
Figura 5.19 Adrián, pág. 15, preguntas finales.....	86
Figura 5.20 Paula, pág. 16.....	87
Figura 5.21 Paula, pág. 18 .....	90
Figura 5.22 Daniela, pág. 18, pregunta 9.....	90
Figura 5.23 Daniel, pág. 18, pregunta 9 .....	90
Figura 5.24 Claudia, pág. 18, pregunta 9 .....	91
Figura 5.25 Ana Karen, pág. 18, pregunta 9.....	91
Figura 5.26 Fernando-Pretest .....	91
Figura 5.27 Fernando, pág. 19, pregunta 1 .....	92
Figura 5.28 Fernando, pág. 19, pregunta 4.....	93
Figura 5.29 Francisco, pág. 19, pregunta 4 .....	93
Figura 5.30 Eduardo, pág. 19, pregunta 4 .....	93
Figura 5.31 Claudia, pág. 19, pregunta 4 .....	93
Figura 5.32 Claudia, pág. 19 .....	95
Figura 5.33 Paula, pág. 19 .....	96
Figura 5.34 Guillermo, pág. 19.....	97
Figura 5.35 Daniela, pág. 19.....	98
Figura 5.36 Daniel, pág. 19 .....	99

Figura 5.37 Paula, pág. 21 .....	100
Figura 5.38 Daniela, pág. 23.....	101
Figura 5.39 Daniela, pág. 24.....	101
Figura 5.40 Paula, pág. 25 .....	102
Figura 5.41 Daniela, pág. 26.....	103
Figura 5.42 Alfredo, pág. 27 .....	105
Figura 5.43 Gráfica realizada en el aula con Excel .....	106
Figura 5.44 Daniela, pág. 29.....	106
Figura 5.45 Alfredo, pág. 30 .....	107
Figura 5.46, Fernando, pág. 31 .....	107
Figura 5.47 Gráfica 1, Adrián Lezama .....	109
Figura 5.48 Gráfica 2, Ixman Saúl .....	109
Figura 5.49 Gráfica 3, Diana .....	110
Figura 5.50 Daniela, Interpretación-Embodiment.....	110
Figura 5.51 Koinda, Interpretación-Embodiment.....	111
Figura 5.52 Jonathan, Interpretación-Embodiment .....	112
Figura 5.53 Alberto, Interpretación-Embodiment .....	112
Figura 5.54 Guillermo, Interpretación-Embodiment.....	112
Figura 5.55 Eduardo, Interpretación-Embodiment.....	113
Figura 5.56 Alfredo, Interpretación-Embodiment.....	113
Figura 5.57 Josué, Interpretación-Embodiment .....	114
Figura 5.58 Fernando, Interpretación-Embodiment .....	114
Figura 5.59 Joaquín, Interpretación-Embodiment.....	114
Figura 5.60 Daniel, Interpretación-Embodiment.....	115
Figura 5.61 Francisco, Interpretación-Embodiment.....	115



## Lista de Tablas

Tabla 2.1 Caracterización de actividades cognitivas según Duval.....	17
Tabla 2.2 La enseñanza mediante el conflicto cognitivo (Pozo y Gómez Crespo, 1998) .....	22
Tabla 2.3 La enseñanza mediante investigación dirigida (Pozo y Gómez Crespo, 1998) .....	23
Tabla 2.4 La enseñanza por explicitación y contrastación de modelos (Pozo y Gómez Crespo, 1998).....	24
Tabla 3.1 Habilidades, actitudes y valores de la ciencia que se promueven en la secundaria (tomado de SEP, Ciencias II 2011, pág. 22).....	26
Tabla 3.2 Bloque 1 de estudio del programa de ciencias II. La descripción del movimiento y la fuerza (tomado de SEP, Ciencias II 2011, pág. 54).....	27
Tabla 3.3 Bloque 3 de estudio del programa de Matemáticas III (tomado de SEP, Matemáticas 2011, pág. 49) .....	31
Tabla 3.4 Bloque 3 de estudio del programa de Matemáticas III (tomado de SEP, Matemáticas 2011, pág. 50) .....	32
Tabla 4.1 Caracterización de los estudiantes según su nivel de percepción.....	57
Tabla 4.2 Correlación de respuestas para encontrar criterios de contradicción .....	59
Tabla 4.3 Correlación de las respuestas a las preguntas del bloque 2 .....	62
Tabla 4.4 Categorización de reconocimiento de registros.....	64
Tabla 4.5 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Registro Numérico.....	64
Tabla 4.6 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Registro Gráfico.....	65
Tabla 4.7 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Tendencias .....	65
Tabla 4.8 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Rapidez por la rapidez .....	66
Tabla 4.9 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Razones.....	66
Tabla 4.10 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Esquemas .....	66
Tabla 4.11 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Coordinación de registros .....	67
Tabla 5.1 Selección de 15 estudiantes para seguimiento. ....	74



## Resumen

Interpretar la naturaleza y sus cambios es una actividad que se realiza cotidianamente. Cuando las interpretaciones de unos coinciden con las de otros las llamamos sentido común, el cual tiene una gran aceptación y arraigo, pero que no obedece a reglas o parámetros científicos. La explicación del fenómeno de caída de los cuerpos se origina en el sentido común y puede permanecer ahí aún después de haber recibido formación escolar o académica. Las ideas previas son aquellas que obedecen al sentido común, son persistentes y compartidas por muchos, se pueden adaptar y modificar de tal modo que se puede creer que explican en todo momento la realidad del mundo físico. En la historia de las ciencias hubo ideas que se consideraron satisfactorias para todos, porque explicaban al menos parcialmente un campo de la realidad, pero nunca faltaron ideas más poderosas, creativas y audaces, capaces de romper cualquier paradigma y de poner a prueba el sentido común. Las llamadas revoluciones científicas permitieron el avance de la ciencia y un cambio en la comprensión del universo. Una analogía de las revoluciones científicas se da en el proceso de enseñanza-aprendizaje, cuando se ponen a prueba las ideas previas y pierden su capacidad para explicar la realidad, es decir, cuando pierden su validez. Entonces surgen anomalías que irán abriendo paso a nuevas explicaciones, pero sobre todo a unas más formales, lo que se ha denominado cambio conceptual. Si las ideas son imágenes, representaciones de la realidad, entonces en la medida que se ponen a prueba esas representaciones se prueba su validez. Las matemáticas permiten poner a prueba distintas representaciones de diferentes niveles de complejidad, de modo tal que la formación de conceptos se pueda hacer de una manera cada vez más estructurada. En este trabajo de investigación se propone una secuencia didáctica que presenta al alumno distintas representaciones semióticas del concepto de aceleración, con la intención de promover en él un cambio conceptual. La secuencia ha sido diseñada para trabajarse con alumnos de entre 13 y 14 años de edad, tomando en cuenta las ideas previas del rango de edades correspondientes. Consta de tres fases principales, iniciando con la percepción del fenómeno y su interpretación en lenguaje natural, luego se proponen distintos tratamientos en distintos registros de representación que deberán coordinarse para finalmente acercarse a la modelación del fenómeno de aceleración. Con la ayuda de un pretest que toma en cuenta las ideas previas de los alumnos sobre el concepto de aceleración, se clasifica su pensamiento. Se pone a prueba la secuencia didáctica en un grupo de 43 estudiantes de secundaria y se evalúa el desempeño de los estudiantes con un postest y un ejercicio de personificación del movimiento llamado *embodiment*. Del análisis de los resultados se da cuenta de que la coordinación de varios registros de representación y el desarrollo de los procesos cognitivos de interpretación inductiva y deductiva, permite a los estudiantes dar explicaciones más adecuadas sobre el fenómeno de aceleración, reconocer su modelización y construir un pensamiento cada vez más formal.



## Abstract

Interpreting the nature and its changes is a daily activity. When the interpretations are understood by everybody in a same way, we call it common sense, with acceptance and hold, but without rules or scientific standards. The explanation to the falling body originates in common sense and it can persist even after a scholar or academic formation. The misconceptions are those that obey common sense, are persistent and shared by many, can be adapted and modified so that you can believe all the time explaining the reality of the physical world. In the history of sciences there were ideas that were considered satisfactory for everyone because they explained at least partly a field of reality, but never missed more powerful, creative and bold, capable ideas to break any paradigm to test common sense. It calls scientific revolutions, which allowed the advancement of science and a change in the understanding of the universe. An analogy to scientific revolutions occurs in the teaching-learning process; when the misconceptions have been tested and lose their ability to explain reality, ergo, lose their validity. Then appear anomalies that will open up the way to new explanations, but especially more formal, which has been called conceptual change. If ideas are images, representations of reality, then if the representations are tested its validity is tested. Mathematics allows testing different representations of different levels of complexity, so that the construction of concepts can be made on an increasingly structured way. In this research is proposed a didactic sequence which presents to the student different semiotic representations of the concept of acceleration, with the intention of promoting in him a conceptual change. The sequence is designed to be worked with students aged 13 to 14 years, taking into account the misconceptions of the corresponding age range. It consists of three main stages, beginning with the perception of the phenomena and its interpretation in natural language, then different treatments are proposed in different registers of representation that must be coordinated to finally approach to modeling the phenomena of acceleration. The thinking of students was classified with the help of a pretest that takes into account the pupils misconceptions on the concept of acceleration. The teaching sequence was tested in a group of 43 high school students and the performance of students is evaluated with a posttest and an embodiment exercise. The analysis of the results from the study realizes that the coordination of multiple representation systems and the development of inductive and deductive interpretation cognitive processes allows to students give explanations more appropriated about the phenomenon of acceleration, to recognize its modeling and build a more formal thought.



# Introducción

Entender el concepto de aceleración no ha sido sencillo para el hombre. Conocemos interpretaciones que fueron planteadas desde la antigüedad con la intención de darle una explicación al fenómeno, sin lograr describirlo a cabalidad. Se ha vuelto necesario entonces replantear la forma de entender el entorno y proponer nuevas interpretaciones. Al someter las nuevas interpretaciones al juicio de los demás se puede ocasionar una gran resistencia para su aceptación, sobre todo si no se está abierto al cambio y dispuesto a cuestionar y discutir las ideas de otros.

Lo más curioso es que el pensamiento humano tenga una tendencia común, *un sentido común*, al que constantemente acudimos para poder interpretar nuestro mundo y desempeñarnos *exitosamente* dentro de él.

Cómo interpretar el mundo es tan importante que de ello depende el éxito de nuestras acciones. Quienes son capaces de refinar sus interpretaciones de lo que les rodea y someterlas a un juicio severo conocen un poco más de ello o tal vez menos en términos generales, pero un poco más en aspectos particulares.

La investigación que se describe en este documento propone generar un proceso de resignificación del concepto de aceleración, utilizando distintas representaciones que permitan interpretar correctamente el fenómeno de aceleración rectilínea uniforme.

Las primeras interpretaciones del concepto de aceleración en lenguaje oral se las debemos a Aristóteles (Düring, 1990), las primeras representaciones gráficas a los calculadores del Merton Colege (Farmaki, Klaudatos y Pschos, 2004) y las mediciones contrastadas con la experimentación a Galileo (Drake, 1975); un acercamiento a estas primeras representaciones del fenómeno de aceleración se discuten en el Capítulo 1 de esta tesis. En él también se plantea el problema, las preguntas y los objetivos de investigación.

En el capítulo 2 se exponen las bases teóricas y conceptuales que dan sustento al problema de investigación. La teoría del cambio conceptual (Posner y colaboradores, 1982) entendida como una analogía de las revoluciones científicas de Kuhn (1962, citado en Nosnik y Elguea, 1985). En esta teoría se parte del estudio de las ideas previas alrededor de un concepto, en este caso el de aceleración, ideas que tienen características bien definidas y que son muy importantes (CCADET, 2012) porque son las primeras interpretaciones del funcionamiento de nuestro entorno. Pero estas preconcepciones pueden requerir modificación por lo que estudios más actuales (Pozo y Flores, 2007) consideran al cambio conceptual como una reconstrucción de la interpretación de la realidad. Estas interpretaciones pueden considerarse producciones constituidas por el empleo de signos pertenecientes a un sistema con reglas de significado y funcionamiento propias, lo que Duval (1993/1998) ha definido como representaciones semióticas.

En el estudio de las ciencias surge la necesidad de hacer una modelización matemática de ciertos fenómenos, para lo cual se requiere dominar los procesos cognitivos de las representaciones semióticas y el proceso de interpretación inductiva y deductiva en el sentido

de Touma (1999). Es por ello que finalmente se propone en éste capítulo un modelo de enseñanza basado en el cambio conceptual y que tome en cuenta las distintas representaciones de un concepto.

En el Capítulo 3 se describe una propuesta de secuencia didáctica referente al estudio del concepto de aceleración. La secuencia ha sido diseñada para hacer una experimentación educativa con estudiantes de entre 13 y 14 años de edad ubicada dentro del programa de estudios de la secundaria pública en México y comparada con el tratamiento que se hace del tema en un libro de texto. La secuencia didáctica se dividió en tres fases, que proponen tres tratamientos distintos de la aceleración. En la primera fase se busca aprovechar la percepción sensorial para interpretar el fenómeno, en la segunda se detalla la relación funcional entre el tiempo y la distancia y en la tercera se propone hacer interpretaciones inductivo-deductivas que permitan acercarse a la modelización del fenómeno.

El desarrollo de la experimentación con la secuencia didáctica consta de 5 etapas; diseño de la secuencia didáctica, pretest, aplicación de la secuencia didáctica, postest y embodiment. Las primeras tres etapas se describen y analizan en el Capítulo 4, las etapas cuatro y cinco se describen y analizan en el Capítulo 5. Posteriormente se comparan los resultados correspondientes a cada etapa con lo que se obtienen los resultados finales y conclusiones que se discuten en el Capítulo 6.

# Capítulo 1

## La enseñanza de la aceleración y el cambio

El estudio de la aceleración conlleva una complejidad importante, en primer lugar porque se trata de un tema que tiene que ver con la variación y la razón de cambio, y en segundo lugar, porque tiene que ver con la interpretación y comprensión de lo que nos rodea, concretamente con el movimiento de los cuerpos; fenómeno que ha inquietado e interesado a los estudiosos desde la Antigüedad. Para estudiar la aceleración como razón de cambio de la rapidez es necesario que el estudiante relacione dos razones de dos variables que se comparan cada vez con el tiempo, se requiere desarrollar la habilidad para coordinar sus distintas representaciones semióticas, para finalmente aspirar a la modelación matemática.

Es interesante observar sin embargo, que la variación y el cambio son problemas que se relacionan comúnmente con el fenómeno de movimiento, el cual tiene una gran problemática asociada al sentido común. Debido a ello, se ha propuesto la construcción de un modelo de enseñanza basado en la introducción de distintas representaciones del mismo fenómeno, con la intención de promover cambios conceptuales en el pensamiento de los estudiantes con respecto a la aceleración, contenido de la asignatura de física del segundo grado de la enseñanza secundaria.

### 1.1 Planteamiento del problema

Los cursos de física desde el nivel básico hasta los primeros niveles universitarios, usualmente inician con el estudio de la cinemática. Existen algunos aspectos del mundo físico relacionados con el movimiento que pueden ser explicados desde la percepción del fenómeno, pero su representación (o representaciones) abstracta(s), requiere(n) de varios procesos cognitivos que usualmente se tienden a simplificar o incluso se pasan por alto.

Para comenzar el estudio del movimiento, una de las relaciones más básicas que se debe considerar es la de razón, que no por ser básica es simple.

Freudenthal (1983/2001) plantea problemas que tienen que ver con la relación entre variables y los sistemas de representación. Desde el punto de vista físico, cuando se está estudiando el movimiento, se establecen razones entre sistemas, pero, lo que no se observa a

fondo es que en un primer momento se compara la distancia recorrida, digamos inicial, con la final, a lo que Freudenthal denomina *razones internas*, a la vez que se compara el tiempo inicial con el final; que vistas como cocientes, representan un número. En un segundo momento, se compara la distancia inicial recorrida con el tiempo inicial y la distancia final recorrida con el tiempo final; a lo que el investigador llama *razones externas*, por comparación entre sistemas, que vistas como cocientes son magnitudes. Este cambio de sistemas es obviado por los matemáticos y los docentes, pero el autor de esta tesis coincide con Freudenthal en que no necesariamente tendría que ser tan obvio para el que aprende.

Entender cómo cambia un valor con respecto a otro del mismo sistema o cómo cambia un valor con respecto a otro, de otro sistema, no ha sido sencillo. Al realizar Galileo sus experimentos sobre aceleración, pudo establecer este tipo de razones que hemos llamado externas entre tiempos y distancias que no fueron tan evidentes para muchos. Al diluir<sup>1</sup> el experimento de la caída libre con ayuda de un plano inclinado, Galileo pudo observar con mayor facilidad este tipo de relaciones; llegando a la conclusión de que la distancia recorrida está en razón con el cuadrado del tiempo.

Pero plantear un resultado como el descrito anteriormente o concebir una idea que va en contra del sentido común, tiene sus complejidades, que van más allá incluso, del momento histórico que se está viviendo. Se requiere romper paradigmas y dar argumentos para mostrar que las teorías que en el momento histórico, se supone, explican cierto fenómeno tiene debilidades o contradicciones.

Kuhn (1962, citado en Nosnik y Elguea, 1985) plantea que los científicos e investigadores cuentan con teorías que les permiten resolver problemas o tener una metodología de investigación que parte de dicha teoría, sin embargo a veces surgen otras teorías que no necesariamente se relacionan con las anteriores, pero que explican mejor la realidad, o que las viejas teorías presentan tantas anomalías, que no pueden seguirse sustentando. A estas nuevas teorías les llamó *revoluciones científicas*.

Lakatos (1978, citado en Nosnik y Elguea, 1985) por su parte, retoma algunas de las ideas de Kuhn, pero agrega el cinturón de protección que permite a los sujetos defender racionalmente su teoría con hipótesis y definiciones específicas, en el mejor de los casos, con cambios progresivos en la teoría, o bien, en el peor de los casos, con cambios degenerativos en la misma.

Haciendo una analogía entre las revoluciones científicas y el cambio conceptual en el aprendizaje, se puede decir que los individuos generamos concepciones, modelos o teorías que nos permiten explicar el mundo que nos rodea, y todas las experiencias posteriores las deseamos explicar adecuando nuestro mismo modelo. Sin embargo, existen explicaciones que no pueden adaptarse a nuestras preconcepciones, pero además explican mejor la realidad. Cuando estas fallas en las teorías o modelos llamadas también anomalías se acumulan, acaban por destruir o reconstruir las teorías o modelos que nos permiten entender los fenómenos que nos rodean.

---

<sup>1</sup>Diluir es un término usado por Fernández y Rontero (2004) que hace referencia a las simplificaciones que hace Galileo sobre el fenómeno de caída libre, al cambiar la observación directa por una más controlada para poder comprenderlo mejor.

De modo que si se utilizan las ideas aquí planteadas de manera intencional para atacar al *cinturón protector* de los estudiantes con modelos distintos, pero más certeros, se podría saturar de anomalías a las teorías anteriores con el objeto de que a su vez se generara un cambio para destruir o construir nuevas representaciones, pero más sólidas, que expliquen mejor la realidad.

En el caso que nos ocupa se pretende usar representaciones distintas de la variación continua constante, para promover cambios conceptuales que vayan de las ideas intuitivas o de *sentido común* (aquellas que no describen el mundo que nos rodea) hacia las ideas científicas.

Las variaciones que se tratan aquí son la de la distancia con respecto al tiempo y la de la velocidad con respecto al tiempo. Cabe aquí hacer una aclaración concerniente al término velocidad, como se sugiere en Trowbridge y McDermott (1981), ya que formalmente se le llama velocidad a aquella variación de la distancia recorrida en relación al tiempo transcurrido para recorrerla en una cierta dirección y sentido, lo que le da su carácter vectorial. Cuando únicamente se desea utilizar el valor de ésta como número o cociente, se trata entonces de una magnitud escalar que en física se conoce con el nombre de rapidez; cuando sea relevante se hará la distinción.

Las actividades que se proponen en el modelo de enseñanza que se describe en esta tesis demandarán del estudiante el uso de habilidades necesarias para el estudio de las ciencias experimentales que están relacionadas con valores y actitudes científicos (AAAS, 1997), como son la observación, medición, registro de datos, análisis de datos, curiosidad, interpretación, análisis, síntesis, deducción, formulación de hipótesis y modelación.

## 1.2 Las primeras ideas sobre movimiento

Los primeros acercamientos al estudio del movimiento se remontan a la época de Aristóteles. En su *Dialogo sobre la filosofía* él hace referencia al *prōtonkinoun* o primer motor, que es lo que pone a todo en movimiento, porque es el fin supremo y porque el Universo tiende hacia él, así que el *primer cielo* mueve a todo lo demás (Düring, 1990, pág. 334).

De las cosmologías anteriores a la de Aristóteles (Pitágoras, Heráclides y Filolao), la Tierra inmóvil se halla rodeada por nueve esferas concéntricas y transparentes que se superponen las unas a las otras como las capas de una cebolla. La capa más interna es la esfera de la Luna; las dos más externas corresponden a la esfera de las estrellas fijas y, más allá de ésta, la esfera del *motor primario* que mantiene en movimiento toda la maquinaria: dios. La región que contiene a la Tierra es la región *sublunar*, en esa región, están confinados los horrores del cambio, los cielos son inalterables más allá de la esfera de la Luna. Toda la materia de la región sublunar consiste en distintas combinaciones de los cuatro elementos (tierra, aire, agua y fuego), los cuales son a su vez, combinaciones de otros dos pares de opuestos: calor y frío, seco y húmedo. La naturaleza de esos elementos requiere que se muevan en líneas rectas: la tierra, hacia abajo; el fuego, hacia arriba; el aire y el agua, horizontalmente. Pero más allá de la esfera de la Luna nada cambia y no se halla presente ninguno de los cuatro elementos terrestres. Los cuerpos celestes están formados por un *quinto elemento* distinto, puro e inmutable, más puro cuanto más alejado de la Tierra está. El movimiento *natural* de este quinto elemento, contrariamente al

de los cuatro elementos terrestres, es circular, puesto que la esfera es la única forma perfecta y el movimiento circular, el único movimiento perfecto (Koestler, 1959/2007, págs. 59-60).

El *movimiento natural* del que hemos hablado aquí es el que realizan los cuatro elementos cuando se mueven en una determinada dirección, para encontrar su lugar natural. Para Aristóteles los elementos tienen en sí una *susceptibilidad de padecer movimiento*, así el lugar natural de un elemento es el punto de destino del movimiento, porque cuando un cuerpo se mueve naturalmente, al llegar al punto de destino se detiene de manera natural (Düring, 1990, págs. 518-520).

Según Aristóteles, para un móvil, la velocidad es directamente proporcional a la fuerza impulsora e inversamente proporcional a la resistencia del medio. La fuerza de impulso debe ser mayor que la resistencia, pues si no, no se lleva a cabo ningún movimiento. Ideas que lo llevan a argumentar sobre la no existencia del espacio vacío; primero porque si la velocidad está en relación inversa a la densidad del medio y ésta es cero en el espacio vacío, la velocidad en el espacio vacío no estará en ninguna relación con el medio, por consiguiente la velocidad de un cuerpo es directamente proporcional al peso del móvil. Aristóteles sí se planteó la pregunta de por qué los cuerpos deberían moverse con velocidades desiguales en el espacio vacío donde no hay resistencia alguna, a lo que contesta que en un espacio vacío, los cuerpos, sin consideración de su forma y peso, se moverían con la misma velocidad, lo cual califica de absurdo (Düring, 1990, pág. 499).

Es después de mucho tiempo, hasta el siglo XIV que los lógico-matemáticos del Merton College de Oxford (1330-1340) conocidos como *Calculadores*, estudiaron el movimiento de los cuerpos. Ellos introdujeron la idea de establecer relaciones funcionales para describir magnitudes cualitativas como la velocidad, la distancia o el tiempo con características cuantitativas medibles. Esos estudiosos también definieron varias clases de movimiento, propusieron teoremas concernientes al movimiento y los probaron matemáticamente. Sus pruebas se basaron en la geometría Euclidiana.

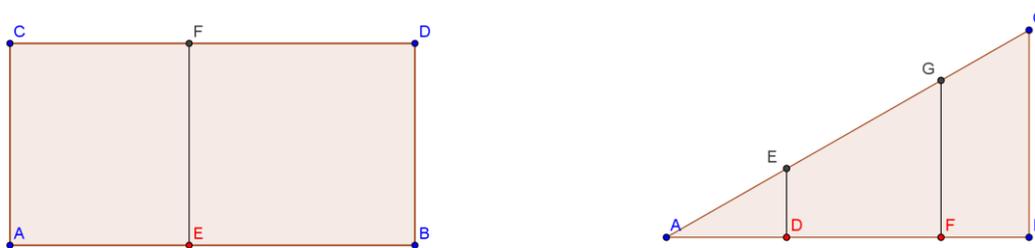


Figura 1.1 Representación de cualidades (Adaptado de Farmaki, Klaudatos y Paschos, 2004)

Richard Swineshead definió el movimiento uniforme en su *De Motu* de la siguiente manera: El movimiento local uniforme es aquel en que en cada parte igual de tiempo se describe una distancia igual. William Heytesbury en *Rules for Solving Sophism* definió el movimiento uniformemente acelerado como: Cualquier movimiento será uniformemente acelerado si en cada una de las partes iguales de un tiempo cualquiera, se adquiere un incremento igual de velocidad. Por otra parte, Nicolas Oresme en 1362 en su *Tractatus de configurationibus qualitatum et motum* representó las variaciones de cualidades, con figuras geométricas. En la

obra de Oresme las figuras geométricas pueden ser usadas para representar la cantidad de una cualidad. Por ejemplo, podemos considerar el rectángulo y el triángulo rectángulo que aparecen en la Figura 1.1.

Cada figura mide la cantidad de una cualidad, en este caso se considera la velocidad (rapidez). La línea AB en cada caso representa la extensión de una cualidad (en este caso el tiempo). Además de la extensión, también se debe representar la intensidad de la cualidad, de un punto a otro, sobre la línea base AB. Esto se hace proyectando líneas perpendiculares a la línea base, la longitud de las líneas cambia conforme cambie la intensidad. Así que en cada punto a lo largo de AB hay alguna intensidad de la cualidad y la suma de todas esas líneas es la figura que representa la cualidad.

Ahora el rectángulo ABDC representa la cualidad uniforme, mientras que las líneas AC, EF, BD representan las intensidades de la cualidad en los puntos A, E, y B que son todas iguales en este caso (donde E representa cualquier punto sobre AB), así que la intensidad de la cualidad es uniforme a todo lo largo de AB.

En el caso del triángulo rectángulo ABC será igualmente evidente que las longitudes de las líneas perpendiculares representan intensidades que se incrementan uniformemente desde cero en el punto A hasta BC en el punto B, de acuerdo con la definición del Merton College de movimiento uniformemente acelerado (donde AB representa la línea de tiempo). Oresme designó a la línea CD, en el caso del rectángulo o a la línea AC en el caso del triángulo como *línea de intensidad*, la cual corresponde a la curva que representa el movimiento en el contexto de la geometría analítica moderna. Oresme también entendió (sería interesante saber cómo) que las áreas de las figuras en el caso del movimiento local, representan las distancias recorridas en los tiempos correspondientes representados en cada caso por AB (Farmaki, Klaudatos y Paschos, 2004).

Existieron algunos esfuerzos para resolver el problema de las velocidades desiguales, sin embargo no pudieron concretarse. Es hasta la deducción hecha por Galileo en los *Discorsi*, en donde a falta de poder experimentar con sus ideas sobre caída libre; ingeniosamente *diluye* el movimiento al de una bola cayendo a lo largo de un plano de pocos grados de inclinación (ángulos agudos), lo que le permitió extrapolar el caso de caída libre para cuando el ángulo de inclinación es de  $90^\circ$  (Fernández y Rondero, 2001).

### **1.3 El problema de investigación**

Todo lo que se ha planteado anteriormente pretende establecer la problemática relacionada con el estudio del concepto de la aceleración. Se trata de un fenómeno físico que se ha estudiado desde hace siglos y su comprensión ha sido lenta, tal vez porque al vivir en un mundo cambiante, se asume que se entienden las leyes que gobiernan su movimiento, aludiendo normalmente al sentido común, pero si éste falla tampoco nos causa graves problemas en la vida cotidiana. Ebersbach, Van Doorden y Verschaffell (2011) refieren que se ha podido demostrar que la gente posee tanto ideas correctas, como incorrectas sobre la aceleración; mencionan que por ejemplo los niños, se sorprenden si un objeto que está cayendo por un plano inclinado desacelera en vez de acelerar o si un objeto en caída libre, aparentemente cae con

velocidad constante en vez de caer aceleradamente, del mismo modo, los adultos estiman correctamente la distancia y el ángulo de inclinación para que un objeto resbale por un plano inclinado. Por otra parte, los estudiantes de secundaria asumen incorrectamente una relación lineal entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida del movimiento sobre un plano inclinado, incluso quienes han recibido educación formal en física presentan el sesgo de Galileo, al asumir que los objetos caen con la misma rapidez, porque están ignorando la resistencia del aire.

Freudenthal (1983/2001) apunta que la comprensión del concepto de aceleración implica comparar magnitudes de distinta especie, medir variables tangibles como la distancia y otras intangibles como el tiempo y además compararlas entre sí, lo que conlleva cierto nivel de complejidad. Una mejor comprensión del fenómeno físico podría darse al describirlo por medio de distintos registros de representación semiótica, como el numérico, el algebraico, el geométrico y el gráfico (Duval, 1993/1998).

En el ámbito del sistema educativo, existen problemas de diseño de currículo, que no permiten ligar los contenidos de una manera fluida y útil para el estudiante, porque comúnmente los contenidos propuestos para el estudio de las matemáticas se encuentran desfasados y rezagados en relación con los contenidos de física por lo que el alumno no puede reconocer en las matemáticas un sistema de representación que explica eficientemente el mundo que le rodea (Flores-Camacho, 2012, págs. 82-83).

El trabajo de investigación descrito en este documento propone generar un proceso de resignificación del concepto de aceleración, utilizando distintas representaciones que permitan interpretar correctamente el fenómeno físico.

#### **1.4 Preguntas y objetivos de investigación**

Con base en la problemática observada en el estudio del tema de aceleración con estudiantes de 13 a 14 años de edad, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿El uso de distintas representaciones puede generar suficientes contradicciones a las ideas incorrectas adquiridas a través del sentido común sobre el concepto de aceleración y motivar la construcción de un pensamiento formal?
2. ¿Cuál es el papel de las representaciones en la formación del concepto de aceleración?

Con la finalidad de contestar las preguntas anteriores se establecen los siguientes objetivos de investigación:

1. Reconocer la problemática que se enfrenta en la comprensión del concepto de aceleración.
2. Clasificar las ideas previas de los alumnos con referencia al concepto de aceleración.
3. Proporcionar actividades didácticas que permitan caracterizar los conceptos relacionados con el movimiento rectilíneo.

4. Proponer situaciones didácticas que tiendan gradualmente a la formalización del concepto de aceleración utilizando distintas representaciones semióticas.
5. Medir cualitativamente la habilidad de los estudiantes para reconocer distintas representaciones semióticas del fenómeno de aceleración.

Para lograr estos objetivos se diseñó un estudio basado en una experimentación educativa. Como ya se mencionó anteriormente el propósito principal de la indagación es diseñar un modelo de enseñanza del concepto de aceleración y poner a prueba secuencias de aprendizaje con un grupo de estudiantes de segundo de secundaria. En el siguiente capítulo se discutirá la relevancia en el estudio de las ideas previas, su caracterización, la relación que tienen con la teoría del cambio conceptual y el papel que juegan las representaciones en la formación de conceptos. También se discutirá la importancia de proponer un modelo de enseñanza que relacione los aspectos teóricos que se han mencionado.



# Capítulo 2

## ¿Por qué modificar la ciencia de los alumnos?

Los seres humanos hacen una interpretación del mundo que les rodea, el cual perciben gracias a los sentidos. En este proceso surgen en la mente representaciones de objetos y de fenómenos con los que un individuo interactúa. La mente humana tiene la capacidad de estructurar las representaciones, relacionarlas y utilizarlas para formar conceptos y solucionar problemas de la vida cotidiana.

En algunas ocasiones, las ideas que enlazan las representaciones, no provienen de una observación objetiva de la realidad y aunque pueden funcionar no necesariamente son consistentes con lo real. Sin embargo, esas ideas se arraigan fuertemente en el pensamiento, que puede mostrarse flexible al cambio si las inconsistencias se resaltan y se muestra su invalidez. Para lograrlo existen muchas propuestas; el éxito de cada propuesta está ligado al modelo de enseñanza-aprendizaje que a su vez dependerá de la identificación del docente con el modelo de enseñanza y la adaptación de los estudiantes a la forma de trabajo. En este capítulo se expone un marco de referencia teórico vinculado en la teoría del cambio conceptual y la formación de las representaciones semióticas que puede servir para diseñar una estrategia de enseñanza con la intención de modificar la *ciencia de los alumnos*.

### 2.1 Ideas previas en la enseñanza de la ciencia

Las ideas previas son aquellas que utilizan los estudiantes para interpretar distintos fenómenos antes de conocer alguna explicación científica. Esas ideas están relacionadas con errores conceptuales que tienen alumnos de cualquier nivel en un área cualquiera de la ciencia. Se les ha denominado de muchas formas como: *esquemas alternativos*, *concepciones alternativas*, *representaciones mentales*, *ciencia de los alumnos*, *errores conceptuales*, *conocimiento del sentido común* entre otras; cada una de estas expresiones está ligada a posiciones epistemológicas diferentes. Hierrezuelo y Montero (1989/2006) han observado que dichas ideas no dependen del nivel de aprovechamiento y que existe también una gran coincidencia entre alumnos de muy distintos lugares y grados de escolaridad. También se ha apreciado un fenómeno de persistencia.

La persistencia es mayor para aquellas ideas relacionadas con hechos y fenómenos que los alumnos observan con frecuencia. Hashwed (1986, citado en Hierrezuelo y Montero, 1989/2006) apunta como razones de esta persistencia, que existe una tendencia entre los individuos a considerar únicamente las pruebas que confirman sus hipótesis, en lugar de buscar aquellas que les ayudan a falsearlas. A veces los alumnos tienen tanta confianza en sus hipótesis que ni siquiera se preocupan por verificarlas (pensamiento Aristotélico), consideran la anomalía como un caso especial o una excepción a la regla. Algunos profesores no conocen las ideas previas de los alumnos, o sus mismas ideas coinciden con las de los estudiantes, por lo que no pueden ocuparse de intentar que sus educandos las superen. Así mismo, no se toman en cuenta métodos de evaluación con los cuales se analice la existencia de preconcepciones ni el grado en que han podido ser superados (Hierrezuelo y Montero, 1989/2006).

### **2.1.1 Orígenes y características de las ideas previas**

La explicación de cómo construye el sujeto las ideas previas está ligada a poder explicar, a su vez, cómo construyen el conocimiento los sujetos.

Un elemento que contribuye a comprender el origen de las ideas previas es la necesidad que tienen los sujetos de contar con una forma de interpretación que les permita tener una visión, al menos parcialmente coherente, de la fenomenología más inmediata, esto es, de los eventos naturales con los que están cotidianamente en contacto. Esta forma de interpretación está en función de experiencias cotidianas, de la inteligibilidad de las explicaciones de otros, de la suficiencia de la concepción elaborada por el sujeto para fines específicos como explicaciones y predicciones y, de la capacidad de comunicación de esa interpretación.

Otro elemento que contribuye a explicar el origen de las ideas previas, es el mecanismo de validación que los sujetos utilizan comúnmente y que, en general, consiste en la contrastación simple o directa y el acuerdo entre pares.

Por otro lado, es importante mencionar que las construcciones de los sujetos tienen una aplicación limitada, es decir, las representaciones elaboradas corresponden a unos cuantos fenómenos comunes; sin embargo, si la persona considera que otros fenómenos son de alguna manera semejantes a los que conoce, extrapola sus representaciones. Si, considera que cierto tipo de fenómenos no lo son, lleva a cabo otra interpretación y construye ideas previas distintas. Lo que lleva a considerar que el contexto es otro aspecto importante en la construcción de las ideas de los estudiantes.

Finalmente, las ideas previas, como toda conceptualización que permita explicar o predecir un suceso, requiere, para su transformación de un proceso complejo, donde deben cumplirse diversas condiciones como el reconocimiento de anomalías (fallas en una teoría), insatisfacción de las explicaciones o predicciones, la aceptación y mínima comprensión de otras posibles explicaciones y, tener en cuenta que dicha transformación requiere pasar por diversos niveles o etapas (Strike y Posner, 1985, citados en CCADET, 2012).

Por las características mencionadas se puede reconocer la universalidad de las ideas previas, que no dejan de depender del lenguaje y el contexto.

Las características principales de las ideas previas que se incluyen a continuación han sido tomadas de la página del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) (2012):

- ~ Los estudiantes llegan a las clases de ciencia con un conjunto diverso de ideas previas relacionadas con fenómenos y conceptos científicos.
- ~ Las ideas previas de los estudiantes se encuentran presentes de manera semejante en diversas edades, género y culturas.
- ~ Las ideas previas son de carácter implícito, esto es, en la mayoría de los casos los estudiantes no llevan a cabo una *toma de conciencia* de sus ideas y explicaciones.
- ~ Las ideas previas que corresponden a conceptos y no a eventos, se encuentran, por lo general, indiferenciadas, es decir, presentan confusiones cuando son aplicadas a situaciones específicas.
- ~ Las ideas previas son generadas a partir de procesos donde los cambios son muy evidentes, mientras que los aspectos estáticos pasan, usualmente, desapercibidos.
- ~ Buena parte de las ideas previas son elaboradas a partir de un razonamiento causal directo, en el cual, el cambio en un efecto es directamente proporcional al cambio en su causa.
- ~ Las ideas previas en un mismo alumno pueden ser contradictorias cuando se aplican a contextos diferentes.
- ~ Las ideas previas no se modifican por medio de la enseñanza tradicional de la ciencia.
- ~ Las ideas previas guardan ciertas semejanzas con ideas que se han presentado en la historia de la ciencia.
- ~ Los orígenes de las ideas previas se encuentran en las experiencias de los sujetos con relación a fenómenos cotidianos, en la correspondencia de interpretación con sus pares y en la enseñanza que se ha recibido en la escuela.
- ~ Los profesores, frecuentemente, comparten las ideas previas de los alumnos.
- ~ Las ideas previas interfieren con lo que se enseña en la escuela teniendo como resultado que el aprendizaje sea deficiente, con importante pérdida de coherencia.
- ~ Es posible modificar las ideas previas por medio de estrategias orientadas al cambio conceptual.

La caracterización de las ideas previas que se hizo en el párrafo anterior permite ubicarlas como elementos esenciales en la comprensión de los problemas del aprendizaje de los conceptos científicos. Las ideas previas constituyen un elemento central en la elaboración de representaciones de los fenómenos, sean observados directamente por los sujetos o procedentes de la descripción que hacen otros (Ibid).

### **2.1.2 Ideas previas sobre la velocidad y la aceleración**

El CCADET antes Centro de Instrumentos de la UNAM participó en el proyecto de la localización, identificación, captura, análisis, categorización y organización de las ideas previas de los estudiantes que se encuentran en la literatura especializada reciente. El estudio fue apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) de México bajo el número

R30474-S. En la página <http://ihm.ccadet.unam.mx/ideasprevias> (2012) del CCADET se pueden consultar las ideas previas relacionadas con los conceptos de velocidad y aceleración que aparecen a continuación, así como las referencias bibliográficas de los informes de investigación de los proyectos por medio de los cuales se identificaron.

En el artículo de Laburú y de Carvalho (1992), encontrado en la biblioteca del Centro de Instrumentos de la UNAM se documentan las siguientes ideas previas:

- Un móvil acelerado recorre distancias iguales en intervalos de tiempos iguales.
- Existe aceleración en movimientos uniformes, pero sólo cuando la velocidad del movimiento es alta.
- La diferencia de distancias recorridas entre dos móviles se debe a la aceleración de cada uno.
- La aceleración es producida por una fuerza.
- La posición de un móvil al recorrer una trayectoria va en función de su aceleración.
- La aceleración es un incremento de velocidad en un intervalo de espacio.
- La aceleración es un incremento de velocidad en un intervalo de tiempo.
- La aceleración es una variación de la velocidad.
- La velocidad final de un móvil depende de la aceleración.

La idea previa: *Para que un objeto aumente su velocidad, es decir, que se acelere, se tendría que aplicar una fuerza que aumente constantemente*, fue identificada por Twigger et al (1994). El informe del estudio puede consultarse en la biblioteca del Centro de Instrumentos de la UNAM.

Por otra parte, Trowbridge y McDermott (1980) refieren que existen dificultades conceptuales que tienen que ver con la imposibilidad de diferenciar entre posición y velocidad. En un estudio posterior (Trowbridge y McDermott, 1981) los investigadores afirman que una gran cantidad de alumnos confunden el concepto de velocidad con el de aceleración; quienes los diferencian pueden hacer la distinción entre velocidad instantánea y cambio en la velocidad, pero fallan a menudo en reconocer el intervalo de tiempo correspondiente. Algunos estudiantes demostraron ser capaces de entender la aceleración como razón y aplicar este concepto en una situación real, sin embargo fueron incapaces de combinar dicha información para comparar exitosamente dos aceleraciones.

Suárez (citado en Ebersbach, Van Doorden y Verschaffel, 2011) dice que alumnos de secundaria asumen incorrectamente que existe una relación lineal entre el tiempo de caída y la distancia en el movimiento sobre un plano inclinado.

Algunos estudiantes con instrucción formal en física coinciden con el *sesgo de Galileo* que los lleva a creer que los cuerpos caen todos a la misma velocidad, porque no han considerado la resistencia del aire (Oberle, McBeath, Madigan y Shugar, citado en Ebersbach, Doorden y Verschaffel, 2011).

## 2.2 Cambio conceptual y de representación

Aunque hasta el momento no se ha hecho referencia a cómo se concibe la construcción del conocimiento, los tópicos mencionados sí permiten ubicar este trabajo dentro del paradigma constructivista de enseñanza y de aprendizaje. Porque es en él, donde tienen mejor cabida los paradigmas de Kuhn (1962, citado en Nosnik y Elguea, 1985), el refinamiento o imposición de nuevas teorías sobre teorías anteriores, propuestas por Lakatos (1978, citado en Nosnik y Elguea, 1985), las concepciones alternativas y los modelos más usados para la enseñanza de las ciencias que consideran al alumno como científico.

El cambio conceptual es el tránsito de las ideas preconcebidas de los alumnos sobre cierto fenómeno a los conocimientos científicos aceptados. Lograr modificar la forma de pensar e interpretar lo que ocurre a nuestro alrededor sin caer en las trampas del sentido común no es nada sencillo, porque dentro del marco constructivista se considera que el alumno tiene una estructura cognitiva constituida, incluso desde temprana edad, por preconcepciones que no se corresponden necesariamente con los conocimientos científicos actuales (Pozo y Flores, 2007).

Posner y colaboradores (1982) establecen que existen dos fases del cambio conceptual en la ciencia. La primera, el establecimiento de *paradigmas* o *logros*, esto es, el surgimiento de teorías que explican, por primera vez en la historia del área, algún hecho o evento. Debido a ello, según Kuhn (1962, citado en Nosnik y Elguea, 1985), la historia de la ciencia se encuentra marcada por largos periodos de refinamiento estable, subordinados a dichos paradigmas, a lo que él denomina *Ciencia normal*. Por su parte Lakatos (1978, citado en Nosnik y Elguea, 1985) denomina a los conceptos centrales científicos (paradigmas, ciencia normal) como su *Núcleo teórico* y sugiere que estos conceptos generan programas de investigación científica, diseñados para aplicarlos y defenderlos desde la experiencia (Posner, Strike, Hewson y Gertzog, 1982). La segunda fase del cambio conceptual ocurre cuando estos conceptos centrales requieren modificación. En esta etapa, el científico es confrontado con el desafío a sus hipótesis básicas. Si la investigación está muy avanzada, el científico debe adquirir nuevos conceptos y nuevas formas de interpretar el mundo. Kuhn llama a este cambio conceptual *revolución científica*; para Lakatos es el cambio de los *programas de investigación científica*.

De acuerdo con Posner y colaboradores una situación análoga se da con el cambio conceptual en el aprendizaje (ver Figura 2.1). Ellos afirman que algunas veces los estudiantes usan conceptos existentes para explicar un nuevo fenómeno; esta variante de la primera fase del cambio conceptual la llamaron *asimilación*. Muy a menudo los conceptos actuales de los estudiantes son inadecuados para permitirles comprender algunos fenómenos nuevos exitosamente, entonces el alumno debe reemplazar o reorganizar sus conceptos centrales; a esta forma más radical del cambio conceptual la llamaron ellos *acomodación* (Posner, Strike, Hewson y Gertzog, 1982).

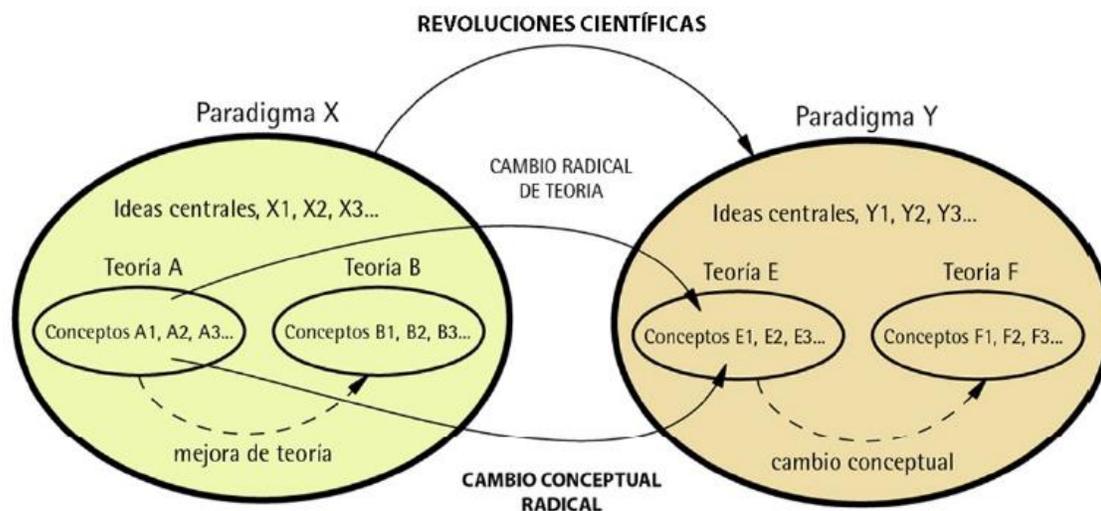


Figura 2.2.1 Analogía del cambio conceptual (Tomada de Bello, 2004)

Análisis posteriores sobre el tema han mostrado la insuficiencia de concebir de esta forma al cambio conceptual, lo que ha llevado a una reformulación del modelo que se ha visto enriquecido por el reconocimiento de diversos aspectos como el cambio o transformación como complemento, como evolución, como reconstrucción y como coexistencia. Recientemente han surgido nuevas posiciones que incorporan nuevos procesos para favorecer el cambio conceptual. En algunos enfoques se considera al cambio conceptual como una reconstrucción en sentido amplio, con nuevos significados y nuevas formas de interpretación de la realidad, que requieren por tanto nuevas formas de razonar, argumentar e incluso representar la información (Pozo y Flores, 2007). Es en este último enfoque en el que se profundizará, ya que interesa sobremanera la forma en que el alumno interpreta el mundo que le rodea, pero además como ha de explicarlo, y es aquí donde las matemáticas le han de servir como un lenguaje de interpretación y comunicación que conlleva sus propias reglas de codificación y significado.

### 2.3 Representaciones semióticas

Según Duval (1993/1998) en el contexto matemático, la palabra representación es muy importante porque siempre está relacionada con un objeto matemático. Sin embargo, no deben ser confundidos representaciones y objetos matemáticos, puesto que de su distinción depende la comprensión de las matemáticas.

Pero las representaciones que nos interesa reconocer para el estudio descrito en este documento son las llamadas representaciones semióticas. Éstas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema (el autor también se refiere a él como registro), el cual tiene sus propias reglas de significado y de funcionamiento. Ejemplos de sistemas semióticos diferentes son una figura geométrica, una oración, una fórmula algebraica, una gráfica.

Para Duval (1993/1998), la semiosis se entiende como la aprehensión o la producción de una representación semiótica y noesis como la aprehensión conceptual de un objeto, de dónde surge

lo que se denomina *la paradoja cognitiva del pensamiento matemático*: el hecho de que no hay semiósis sin noesis. Pero para lograr la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos, parece ser una condición necesaria además, contar con el recurso de coordinar varios registros de representación. En resumen, para que se dé la aprehensión conceptual de los objetos es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de estas.

Tres actividades cognitivas están ligadas a la semiósis: la formación de una representación (representación válida), el tratamiento (transformación interna a un registro) y la conversión (transformación de una representación a otra de otro registro). Ver Tabla 2.1, para una caracterización.

Duval (1993/1998) considera que si la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, no basta promover en la enseñanza, la automatización de tratamientos o la comprensión de nociones, es necesario además que se promueva la coordinación de los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático.

La coordinación de registros es una condición fundamental para el aprendizaje de las matemáticas y el español, pero también para la física, en donde no sólo existen las representaciones semióticas, además se toman en cuenta los datos provenientes de la experimentación con objetos reales o físicos. En la física, al realizar observaciones directas de los fenómenos naturales y sus interacciones con los objetos, se promueve la noesis. Para hacer una interpretación objetiva de lo que sucede en la naturaleza es fundamental la semiósis. La física es un ejemplo de la relación tan estrecha que hay entre semiósis y noesis.

Actividad Cognitiva	Características	Ejemplos
<b>Formación:</b> Representación identificable de un registro dado.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Selecciona rasgos y datos del contenido a representar.</li> <li>• Obedece las reglas propias del registro de representación</li> <li>• Se puede comparar con una descripción</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enunciación de una frase.</li> <li>• Trazo de una figura geométrica</li> <li>• Escritura de una fórmula</li> </ul>
<b>Tratamiento:</b> Transformación de una representación en el mismo registro donde ha sido formada	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obedece las reglas propias de cada registro</li> <li>• Su naturaleza y número varían de un registro a otro</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La paráfrasis</li> <li>• La reconfiguración geométrica</li> <li>• El cálculo</li> </ul>
<b>Conversión:</b> Transformación de una representación a otra de otro registro.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Puede conservar la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ilustración</li> <li>• Traducción</li> <li>• La descripción verbal de una representación semiótica</li> </ul>

Tabla 2.1 Caracterización de actividades cognitivas según Duval

Duval (1993/1998) propone, que para que un estudiante relacione una representación con el objeto matemático que simboliza y su concepto, es imprescindible dominar las tres actividades básicas cognitivas de la semiósis; la formación de las representaciones en un registro semiótico, su tratamiento y conversión, además de contar con el recurso de coordinación de distintos registros de representación.

Las investigaciones de Touma (2009) refieren que en la modelización algebraica de los fenómenos físicos, el dominio de las tres actividades cognitivas de la semiótica es importante y necesario, así como la coordinación de registros de representación, pero no suficiente para que el estudiante pueda acceder al contenido conceptual del modelo matemático que representa al fenómeno.

Este investigador afirma que además de las tres actividades cognitivas mencionadas y la coordinación de registros se debe considerar de la construcción inductiva de un modelo matemático, entendido como el proceso cognitivo con el que los alumnos construyen un objeto conceptual matemático a partir de una representación semiótica de un fenómeno dentro del contexto de las ciencias experimentales.

El proceso de construcción requiere un cambio de marco de racionalidad. Por ejemplo, la representación de un fenómeno físico se encuentra al principio en la racionalidad de la física. En este contexto, esta representación no es a priori un objeto matemático; debido al carácter probabilístico y discontinuo de los datos experimentales. Por tanto, se debe hacer una transferencia de la construcción a un marco de racionalidad matemática. Esta construcción consiste en transformar e interpretar en forma matemática el conjunto de parejas de puntos deforme y polimórfico (los datos) del campo experimental. Este proceso es lo que Touma (2009) denomina como interpretación inductiva.

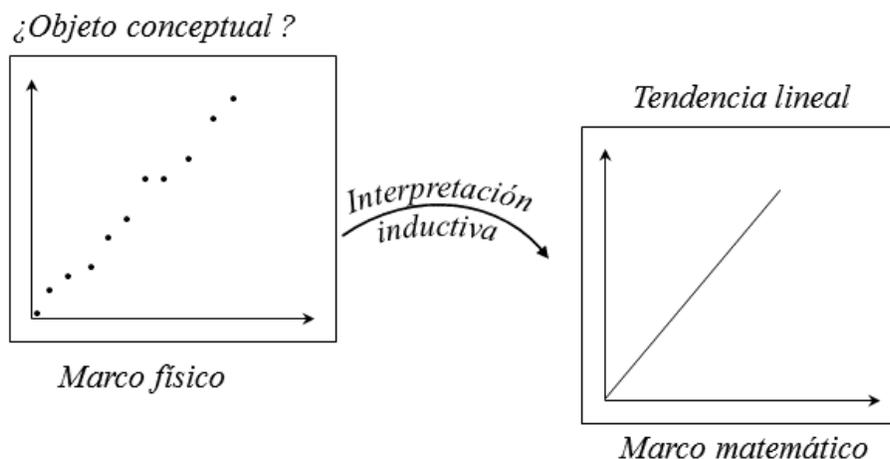


Figura 2.2 Interpretación inductiva (Touma, 2009, modificado)

El otro aspecto a considerar es el que se deriva de algo que sucede muy a menudo en las ciencias experimentales cuando las cantidades y las variables que se consideran no son susceptibles de medida experimental directa. Por ello es necesario para calcular o predecir, a partir de un modelo matemático, se conozca el objeto conceptual construido en la fase inductiva. Para hacer esto, primero se tiene que tener acceso a los contenidos conceptuales o concepto de este objeto matemático. Sin embargo, no es suficiente para llegar a la etapa de coordinación, es decir, ser capaz de igualar las unidades significativas de diferentes representaciones semióticas del objeto. También debemos ser capaces de relacionar las propiedades, características de los objetos fenomenológicos y las condiciones experimentales, ya que a menudo afectan la representación semiótica o modelo matemático correspondiente.

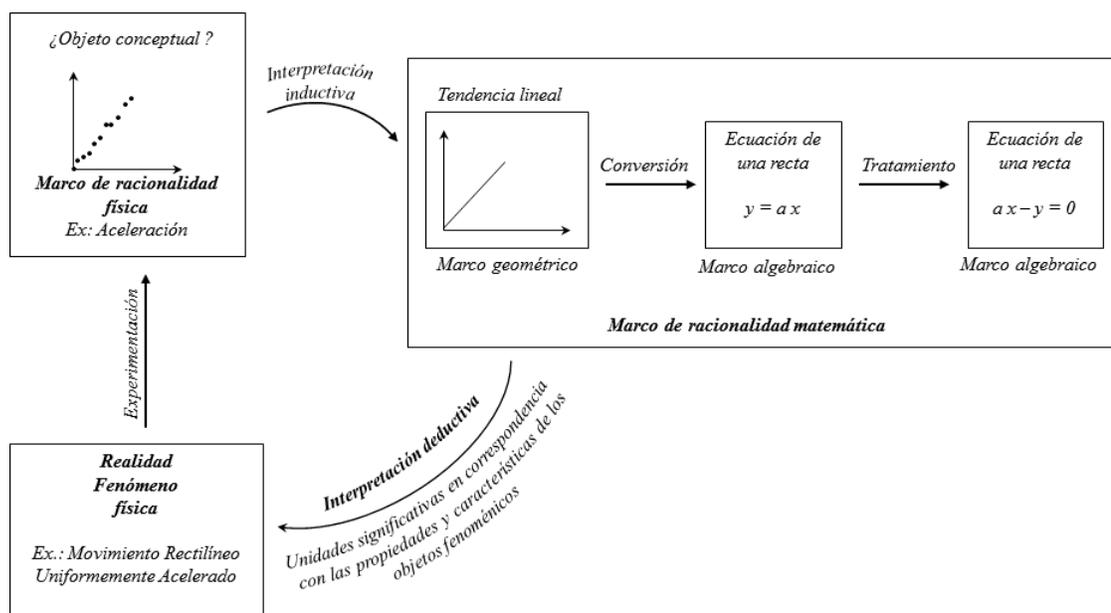


Figura 2.3 Interpretación deductiva (Touma, 2009, modificado)

Esta actividad de correlación es necesaria para validar la predicción y consistencia interna del modelo matemático. Touma (2009) ha denominado interpretación deductiva a esta actividad de transformación, para distinguirla de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en el sentido de Duval.

## 2.4 Modelización

Muchos educadores como Dupin, Johsua, Martinand, Nonnon y Orange (citados en Touma, 2009) ampliaron la definición y la dinámica de los modelos científicos. A pesar de la diversidad de puntos de vista, matices y adiciones, estos investigadores coinciden en que el proceso de modelización se compone de dos fases principales en el pensamiento científico: la inductiva y la deductiva (ver Figura 2.4).

*Elementos de la inducción y la deducción*

- *Fase inductiva:*  
*Se da en la interacción con un fenómeno real en ciencias, los estudiantes identifican las variables y predicen su interacción en la forma de una hipótesis, que a su vez se ha formalizado en un modelo de variables de control que permitirán planificar la experimentación. De los resultados obtenidos, el estudiante puede entonces generar un proyecto de ley o más. A continuación, el resumen explicativo de estas leyes le permiten construir un modelo o teoría.*
- *Fase deductiva:*  
*Al usar este modelo el alumno intenta responder a una pregunta dada relacionada con el fenómeno inicial. A continuación, formula propuestas para los efectos que no sólo explican y contestan a la pregunta, sino también para inferir y predecir los resultados del experimento. A fin de validar el modelo construido en la fase inductiva, es decir, al informar o confirmar, el estudiante compara los resultados esperados e inferidos con datos que provienen de la realidad, los nuevos datos de, por ejemplo, una nueva experiencia en la que tendría que cambiar la variable independiente.*

Figura 2.4 Fases principales del proceso de modelización en el pensamiento científico

En relación con el trabajo de estos investigadores, se puede ilustrar la actividad de modelización matemática de fenómenos científicos en la Figura 2.5.

Touma (2009) considera que estas dos fases no son inconexas. Dentro de la fase de inducción, en la formulación de una hipótesis, también se puede utilizar la deducción. Éste es el razonamiento hipotético-deductivo en el que se aprovechan las supuestas leyes o relaciones verdaderas ya estudiadas para desarrollar nuevas hipótesis o inferencias.

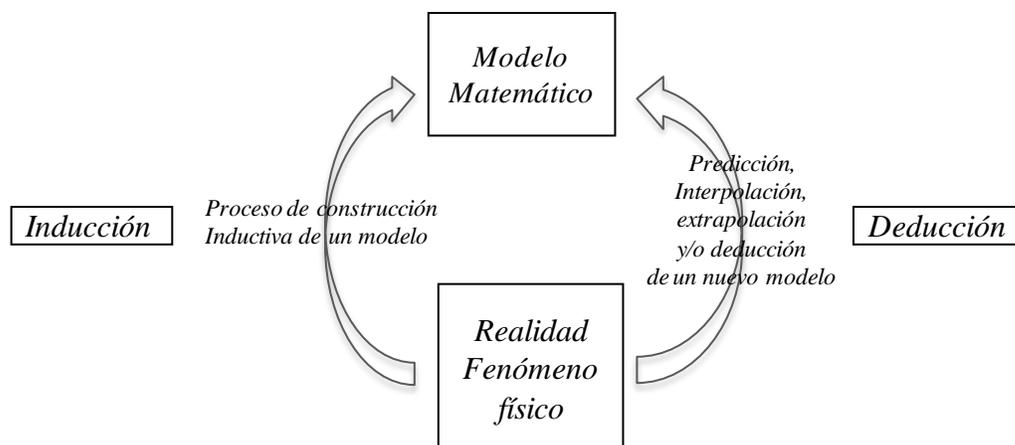


Figura 2.5 Modelización matemática de fenómenos científicos (Touma, 2009)

En la fase inductiva de la actividad de la modelización matemática, los estudiantes construyen un modelo matemático del fenómeno científico, es decir crean una representación semiótica de los datos experimentales; la cual es a su vez una representación semiótica que corresponde a un objeto matemático.

El estudiante valida el modelo de las actividades de predicción, la interpolación y/o deducción de un nuevo modelo en la fase deductiva.

## 2.5 Modelo de enseñanza

Según Marín y Cárdenas (2011) los modelos más usados para la enseñanza de las ciencias se pueden englobar en una clasificación que considera al alumno como científico. Aun cuando esos modelos de enseñanza tienen ciertas limitaciones, son los que más éxito han tenido hasta ahora en el ramo, a saber: el modelo de las concepciones alternativas, modelo del cambio conceptual y modelo de enseñanza por investigación. Estos modelos tienen en común que se basan en el constructivismo como un reflejo de la forma en cómo se ha construido el conocimiento científico, se apoyan en las ideas previas de los alumnos, y proponen estrategias para trabajar con los conceptos científicos; que es en dónde recaen los aspectos criticables.

Un análisis más detallado se puede encontrar en Pozo y Gómez Crespo (1992), con una clasificación un poco distinta que se bosqueja en las Tablas 2.2, 2.3 y 2.4.

Los modelos de enseñanza descritos en las Tablas 2.2, 2.3 y 2.4 son algunos de los que consideran al cambio conceptual como una componente fundamental.

Supuestos y metas	Criterios para seleccionar y organizar los contenidos	Actividades	Dificultades de aprendizaje
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Es el alumno el que elabora y construye su propio conocimiento.</li> <li>-El alumno debe tomar conciencia de sus limitaciones y resolverlas.</li> <li>-Se centra en las concepciones alternativas.</li> <li>-Sustitución de las concepciones intuitivas por conocimiento científico (cambio conceptual).</li> <li>-Enfoque constructivista.</li> <li>-Incompatibilidad entre el conocimiento cotidiano y el científico.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Organización conceptual.</li> <li>-Los contenidos procedimentales y actitudinales no desempeñan un papel importante.</li> <li>-Organización jerárquica que permita que los contenidos desempeñen un papel similar a los paradigmas de Kuhn (1962) o los programas de investigación de Lakatos (1978) en la elaboración del conocimiento científico.</li> <li>-Adopta currículos organizados de manera muy similar a los de la enseñanza tradicional.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-La situación didáctica debe reunir las siguientes condiciones: <ul style="list-style-type: none"> <li>a) El alumno debe sentirse insatisfecho con sus propias concepciones.</li> <li>b) Debe haber una concepción que resulte inteligible para el alumno.</li> <li>c) Creíble</li> <li>d) La nueva concepción debe parecer más potente que las propias ideas del alumno.</li> </ul> </li> <li>- Ayudar al alumno a resolver sus conflictos.</li> <li>- Que los alumnos compartan, hagan suyas las teorías científicas y abandonen sus concepciones alternativas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Continúa la persistencia de las concepciones alternativas.</li> <li>- Los alumnos se empapan de un espíritu que suprime o esconde sus ideas erróneas, sólo en el ámbito escolar.</li> <li>-No recupera la lógica cognitiva que aporta el conocimiento intuitivo.</li> <li>-No considera aspectos motivacionales, afectivos, sociales, etc, que están ligados al proceso de cambio conceptual.</li> <li>-No fija la atención en un cambio metodológico y actitudinal que acompañe a la enseñanza.</li> <li>-Hace falta situar al alumno en un contexto de investigación dirigida.</li> </ul>

Tabla 2.2 La enseñanza mediante el conflicto cognitivo (Pozo y Gómez Crespo, 1998)

En la práctica el modelo más adecuado, es aquel con el que el profesor se siente más identificado y dentro de ese modelo se debe tomar en cuenta la forma en que aprende el alumno (Marín y Cárdenas, 2011). Por la estructura del trabajo cuyo informe es esta tesis, se incluyen características de los otros modelos como las ideas previas de los alumnos, que se someterán a un conflicto cognitivo, originado por la confrontación con distintas representaciones de un mismo fenómeno, con la finalidad de conseguir un cambio conceptual.

Entre las representaciones que se proponen, se comenzará con la representación del fenómeno a partir de la percepción auditiva, luego la representación gráfica que requiere la recolección de datos del experimento, lo que le implicará al alumno utilizar y desarrollar en su caso sus habilidades para clasificar, medir, inferir, combinar, deducir, controlar variables, etc. (Marín y Cárdenas, 2011).

El estudiante deberá interpretar información y relacionarla con el fenómeno estudiado en un contexto empírico, como ya se ha mencionado, y en un contexto virtual al observar el fenómeno ocurrir de manera ideal con ayuda de una simulación. Finalmente tendrá que ser capaz de pasar de una interpretación gráfica-geométrica a una interpretación algebraica.

Supuestos y metas	Criterios para seleccionar y organizar los contenidos	Actividades	Dificultades de aprendizaje
<p>-Se basa en el método científico, pero no en su aplicación rígida.</p> <p>-Los alumnos deben emular un laborioso proceso de construcción social de teorías y modelos.</p> <p>-Promover cambios en los sistemas de conceptos, procedimientos y actitudes.</p> <p>-Incompatibilidad entre el conocimiento cotidiano y el científico en sus métodos y valores.</p> <p>-Posición constructivista porque considera que los modelos y teorías elaborados por la ciencia, métodos y valores son producto de una construcción social.</p> <p>-Situación al alumno en contextos sociales similares a los que vive un científico.</p> <p>-Organizar la enseñanza de la ciencia en torno a la revolución de problemas.</p>	<p>-Problemas generados desde el análisis del conocimiento disciplinar.</p> <p>-La selección de los contenidos se apoya en los contenidos conceptuales de la ciencia.</p> <p>-Algunos casos se organizan en torno a estructuras conceptuales.</p> <p>-Utiliza un eje estructurador.</p> <p>-Utiliza la historia de la ciencia para que se construya como se ha construido la ciencia.</p> <p>-Evaluación basada en el trabajo diario de los alumnos y su investigación.</p>	<p>-Orientar, reforzar matizar, cuestionar las conclusiones.</p> <p>-Despertar el interés de los alumnos por el problema que va a estudiarse previamente seleccionado por el profesor/director de investigación.</p> <p>-Realizar un estudio cualitativo de la situación intentando definir de la manera más precisa el problema, identificando las variables más relevantes que lo restringen, etc.</p> <p>-Emitir hipótesis sobre los factores que pueden estar determinando el posible resultado del problema y sobre la forma en que estos factores condicionan el mismo.</p> <p>-Elaborar y explicitar posibles estrategias de solución del problema planificando su puesta en marcha en lugar de actuar por ensayo y error.</p> <p>-Buscar vías alternativas para la resolución del problema.</p> <p>-Poner en marcha la estrategia o estrategias seleccionadas explicitando y fundamentando al máximo lo que se va haciendo.</p> <p>-Analizar los resultados obtenidos a la luz de las hipótesis previamente explicitadas.</p> <p>-Reflexionar sobre las nuevas perspectivas abiertas por la resolución realizada replanteando y redefiniendo el problema en un nuevo nivel de análisis en relación con otros contenidos teóricos o en nuevas situaciones prácticas.</p> <p>-Idear nuevas situaciones o problemas que merezcan ser investigados a partir del proceso realizado.</p> <p>-Elaborar una memoria final en la que se analicen no sólo los resultados obtenidos en relación al problema planteado sino también el propio proceso de resolución llevado a cabo.</p>	<p>-Alto nivel de exigencia del profesorado.</p> <p>-Extensión del concepto de ciencia.</p> <p>-Cambio de actitudes, conceptos, procedimientos y actitudes en el profesor y los alumnos.</p> <p>-Modelos de formación permanente del profesorado.</p>

Tabla 2.3 La enseñanza mediante investigación dirigida (Pozo y Gómez Crespo, 1998)

En la investigación que sustenta esta tesis se propone una secuencia didáctica que se describe en el capítulo 3, con la cual se espera que los alumnos con la guía del profesor de grupo, observen el fenómeno de caída de un balón sobre un plano inclinado. En una primera fase de la secuencia se centra la atención sobre la percepción del movimiento a través de los sentidos, que servirá para motivar la reflexión sobre lo que ocurre.

Supuestos y metas	Criterios para seleccionar y organizar los contenidos	Actividades	Dificultades de aprendizaje
<p>- Claramente constructivista.</p> <p>-La construcción del conocimiento científico y escolar implica escenarios claramente diferenciados por sus metas y la organización de sus actividades.</p> <p>-Que el alumno conozca la existencia de diversos modelos alternativos en la interpretación y comprensión de la naturaleza y que la exposición y contrastación de esos modelos le ayudará no sólo a comprender mejor los fenómenos estudiados, sino sobre todo la naturaleza del conocimiento científico elaborado para interpretarlos.</p>	<p>-El núcleo organizador son los modelos, es decir, la forma en que representa el conocimiento existente en un dominio dado.</p> <p>-Hay un interés explícito por los contenidos conceptuales, pero estos se organizarían a partir de las estructuras conceptuales o modelos que dan sentido a esos conceptos.</p> <p>-Se trata de profundizar y enriquecer los modelos elaborados por los alumnos, que deben ir integrando no sólo cada vez más información, sino también otros modelos y perspectivas.</p> <p>-Interpretar las diferencias y similitudes entre diferentes modelos.</p>	<p>-Integra las diferentes actividades que se proponen en todos los modelos anteriores, pero no debe confundirse con un eclecticismo metodológico.</p> <p>-Tratar de asumir la complejidad y diversidad de las situaciones didácticas que no permiten establecer secuencias de aprendizaje únicas.</p> <p>-Que los alumnos se enfrenten a problemas que les despierten la necesidad de encontrar respuestas modelizadas, explicitadas, pero también enriquecidas mediante la multiplicación de modelos alternativos.</p> <p>-El profesor debe ejercer papeles diversos en diferentes momentos, debe guiar las investigaciones, exponer alternativas, inducir o generar contra-argumentos, promover la explicitación de los conocimientos, su redescrición en lenguajes o códigos más elaborados.</p> <p>-Promover la reflexión, el meta-conocimiento conceptual y el contraste de modelos.</p> <p>-la capacidad de definir o explicitar varias teorías alternativas para una situación utilizando con precisión el lenguaje de cada una de ellas y discriminando entre sus diferentes interpretaciones.</p> <p>-la capacidad de buscar argumentos en contra de una teoría (incluida la propia).</p> <p>-la capacidad de explicar una teoría diferente a aquella en la que uno cree, diferenciando entre conocimiento y creencia, la capacidad de buscar datos a favor de diferentes modelos y teorías.</p> <p>-por último, la capacidad de integrar o relacionar meta-cognitivamente diferentes explicaciones.</p>	<p>-Que los alumnos acaben por interpretar el trabajo como una división de opiniones, en la que todas las interpretaciones son igualmente válidas. <i>Todo es relativo.</i></p> <p>-Eclecticismo teórico.</p> <p>-Generalidad o transferencia relativa de los modelos aprendidos a nuevos dominios o conceptos.</p> <p>-Parece restringir la instrucción científica al ámbito del conocimiento conceptual, relegando a un segundo plano los contenidos procedimentales y actitudinales.</p>

Tabla 2.4 La enseñanza por explicitación y contrastación de modelos (Pozo y Gómez Crespo, 1998)

En la segunda fase de la secuencia didáctica se estudia el movimiento uniforme contextualizado en una carrera de 100 m planos en la que participó Usain Bolt, campeón olímpico. Con esta situación se pretende establecer el lenguaje necesario para describir matemáticamente el movimiento acelerado y motivar una interpretación más refinada del fenómeno de aceleración. En la tercera fase se propone una forma de modelizar el fenómeno con ayuda de la tecnología para que finalmente los estudiantes sean capaces de describir el fenómeno coordinando distintas representaciones semióticas que se consideran en el diseño de la experiencia de aprendizaje.

# Capítulo 3

## Diseño de una secuencia didáctica

A continuación se describe el plan de estudios, enfoque y programa de estudios vigentes, la relación de este programa con el libro de texto, para después comentar la incongruencia entre contenidos, alcances y la falta de transversalidad sobre todo entre física y matemáticas. Se hace una reflexión sobre cómo se trabajan los contenidos en un libro de texto autorizado por la SEP, para después justificar la propuesta de una secuencia didáctica alternativa.

### 3.1 Modelo de enseñanza de las ciencias y enfoque actual de la educación básica

El modelo de enseñanza propuesto está inmerso en el enfoque para el plan de estudios 2011 de educación secundaria de la SEP que pretende culminar la reforma de la educación básica que se viene gestando desde el año 2000, y que para secundaria se convierte en la Reforma de Educación Secundaria (RES) en 2011. En ella, se hace referencia a que la articulación de la educación básica actualmente se centra en los procesos de aprendizaje de los alumnos, al atender sus necesidades específicas para que mejoren las competencias que permitan su desarrollo personal dentro de un mundo con exigencias globales (SEP, 2011, p. 11).

Tanto en el programa de ciencias 2006 (SEP, 2006) como en el de 2011 (SEP, 2011) se mantiene un enfoque pedagógico que persigue la idea de que el aprendizaje de los alumnos sea lo más significativo posible, para lo cual se solicita la constante contextualización de los contenidos en ámbitos de la experiencia cotidiana, sin dejar de enfatizar una visión integradora que permita comprender la importancia del desarrollo tecnológico siempre que se tome en cuenta la sustentabilidad y cuidado del medio ambiente que lo permite. Sigue siendo parte fundamental la apropiación de los contenidos a partir de la construcción del conocimiento, apoyándose en y nociones que han construido los alumnos. El enfoque se orienta a proporcionar a los alumnos una formación científica básica a partir de una metodología de enseñanza que permita mejorar los procesos de aprendizaje; desarrollando las competencias necesarias para integrarse con mayor facilidad al ámbito laboral y enfrentar las exigencias que las sociedades de la información están imponiendo (SEP, 2011, p. 21).

En cuanto al rol que los integrantes de proceso educativo deben jugar, el docente, debe cambiar su posición de transmisor de conocimientos por el de un facilitador o guía, que incluso puede aprender junto con los alumnos, dentro del proceso de construcción del conocimiento, pero sin dejar de encargarse de motivar la autonomía, el trabajo cooperativo, el desarrollo de la

autoestima; buscando también la posibilidad de que los estudiantes descubran sus propias formas de aprender. Los discentes tendrán la responsabilidad de integrarse a la forma de trabajo que conlleva el desarrollo de todas éstas y más habilidades (SEP, 2011, p. 23 y 24).

### 3.2 Programa de estudios de ciencias II (énfasis en física)

En lo que se refiere a cómo estudiar la física, se promueve la observación del entorno inmediato, para que se motive la reflexión sobre cómo se generan los fenómenos físicos que suceden a nuestro alrededor, realizar experimentaciones de las cuales se pueda recuperar información que a su vez se pueda analizar primeramente de forma gráfica o analítica para posteriormente utilizar modelos que permitan acercarse al entendimiento de los procesos que se presentan en la naturaleza (SEP, 2011, pág. 49).

En la tabla 3.1 se muestran las habilidades que deberán desarrollarse y las actitudes y valores que deberán fomentarse durante el curso.

Habilidades	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Búsqueda, selección y comunicación de información.</li> <li>• Uso y construcción de modelos.</li> <li>• Formulación de preguntas e hipótesis.</li> <li>• Análisis e interpretación de datos.</li> <li>• Observación, medición y registro.</li> <li>• Comparación, contrastación y clasificación.</li> <li>• Establecimiento de relación entre datos, causas, efectos y variables.</li> <li>• Elaboración de inferencias, deducciones, predicciones y conclusiones.</li> <li>• Diseño experimental, planeación, desarrollo y evaluación de investigaciones.</li> <li>• Identificación de problemas y distintas alternativas para su solución.</li> <li>• Manejo de materiales y realización de montajes.</li> </ul>	
Actitudes y valores	Relacionados con la ciencia escolar	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Curiosidad e interés por conocer y explicar el mundo.</li> <li>• Apertura a nuevas ideas y aplicación del escepticismo informado.</li> <li>• Honestidad al manejar y comunicar información respecto a fenómenos y procesos naturales estudiados.</li> <li>• Disposición para el trabajo colaborativo.</li> </ul>
	Vinculados a la promoción de la salud y el cuidado del ambiente en la sociedad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Consumo responsable.</li> <li>• Autonomía para la toma de decisiones.</li> <li>• Responsabilidad y compromiso.</li> <li>• Capacidad de acción y participación.</li> <li>• Respeto por la biodiversidad.</li> <li>• Prevención de enfermedades, accidentes, adicciones y situaciones de riesgo.</li> </ul>

Tabla 3.1 Habilidades, actitudes y valores de la ciencia que se promueven en la secundaria (tomado de SEP, Ciencias II 2011, pág. 22)

Las habilidades propuestas en la Tabla 3.1, son bastante ambiciosas, porque están relacionadas con un ejercicio profundo de la investigación científica, para lo que los cursos de secundaria se vuelven insuficientes.

Las actitudes y valores están muy relacionadas con las actitudes y valores científicos que se mencionaron en el primer apartado del primer capítulo de esta tesis, que pueden fomentarse de manera gradual desde la secundaria y hasta que la vida académica de los estudiantes lo permita.

### 3.3 Ubicación del tema de aceleración dentro del programa de estudios de ciencias II

El tema de aceleración se encuentra localizado en el bloque I, del programa de estudios de ciencias II (énfasis en física), denominado *La descripción del movimiento y la fuerza*, que se detalla en la Tabla 3.2.

Competencias que se favorecen: •Comprensión de fenómenos y procesos naturales desde la perspectiva científica. •Comprensión de los alcances y limitaciones de la ciencia y del desarrollo tecnológico en diversos contextos. •Toma de decisiones informadas para el cuidado del ambiente y la promoción de la salud orientadas a la cultura de la prevención	
Aprendizajes esperados	Contenidos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpreta la velocidad como la relación entre desplazamiento y tiempo, y la diferencia de la rapidez, a partir de datos obtenidos de situaciones cotidianas.</li> <li>• Interpreta tablas de datos y gráficas de posición-tiempo, en las que describe y predice diferentes movimientos a partir de datos que obtiene en experimentos y/o de situaciones del entorno.</li> <li>• Describe características del movimiento ondulatorio con base en el modelo de ondas: cresta, valle, nodo, amplitud, longitud, frecuencia y periodo, y diferencia el movimiento ondulatorio transversal del longitudinal, en términos de la dirección de propagación.</li> <li>• Describe el comportamiento ondulatorio del sonido: tono, timbre, intensidad y rapidez, a partir del modelo de ondas.</li> </ul>	<p>El movimiento de los objetos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Marco de referencia y trayectoria; diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida.</li> <li>• Velocidad: desplazamiento, dirección y tiempo.</li> <li>• Interpretación y representación de gráficas posición-tiempo.</li> <li>• Movimiento ondulatorio, modelo de ondas, y explicación de características del sonido.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica las explicaciones de Aristóteles y las de Galileo respecto al movimiento de caída libre, así como el contexto y las formas de proceder que las sustentaron.</li> <li>• Argumenta la importancia de la aportación de Galileo en la ciencia como una nueva forma de construir y validar el conocimiento científico, con base en la experimentación y el análisis de los resultados.</li> <li>• Relaciona la aceleración con la variación de la velocidad en situaciones del entorno y/o actividades experimentales.</li> <li>• Elabora e interpreta tablas de datos y gráficas de velocidad-tiempo y aceleración-tiempo para describir y predecir características de diferentes movimientos, a partir de datos que obtiene en experimentos y/o situaciones del entorno.</li> </ul>	<p>El trabajo de Galileo</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Explicaciones de Aristóteles y Galileo acerca de la caída libre.</li> <li>• Aportación de Galileo en la construcción del conocimiento científico.</li> <li>• La aceleración; diferencia con la velocidad.</li> <li>• Interpretación y representación de gráficas: velocidad-tiempo y aceleración-tiempo.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Describe la fuerza como efecto de la interacción entre los objetos y la representa con vectores.</li> <li>• Aplica los métodos gráficos del polígono y paralelogramo para la obtención de la fuerza resultante que actúa sobre un objeto, y describe el movimiento producido en situaciones cotidianas.</li> <li>• Argumenta la relación del estado de reposo de un objeto con el equilibrio de fuerzas actuantes, con el uso de vectores, en situaciones cotidianas.</li> </ul>	<p>La descripción de las fuerzas en el entorno</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La fuerza; resultado de las interacciones por contacto (mecánicas) y a distancia (magnéticas y electrostáticas), y representación con vectores.</li> <li>• Fuerza resultante, métodos gráficos de suma vectorial.</li> <li>• Equilibrio de fuerzas; uso de diagramas.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trabaja colaborativamente con responsabilidad, solidaridad y respeto en la organización y desarrollo del proyecto.</li> <li>• Selecciona y sistematiza la información que es relevante para la investigación planteada en su proyecto.</li> <li>• Describe algunos fenómenos y procesos naturales relacionados con el movimiento, las ondas o la fuerza, a partir de gráficas, experimentos y modelos físicos.</li> <li>• Comparte los resultados de su proyecto mediante diversos medios (textos, modelos, gráficos, interactivos, entre otros).</li> </ul>	<p>Proyecto: imaginar, diseñar y experimentar para explicar o innovar. Integración y aplicación</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cómo es el movimiento de los terremotos o tsunamis, y de qué manera se aprovecha esta información para prevenir y reducir riesgos ante estos desastres naturales?</li> <li>• ¿Cómo se puede medir la rapidez de personas y objetos en algunos deportes; por ejemplo, beisbol, atletismo y natación?</li> </ul>

Tabla 3.2 Bloque 1 de estudio del programa de ciencias II. La descripción del movimiento y la fuerza (tomado de SEP, Ciencias II 2011, pág. 54).

### 3.4 ¿Cómo se estudia el tema de aceleración en un libro de texto?

Como lo refiere Flores-Camacho (2012), los libros de texto que se utilizan en las escuelas secundarias en México, actualmente son elaborados por editoriales comerciales que compiten por el mercado y que deben someterse a los lineamientos de la evaluación gubernamental a cargo de la Dirección General de Materiales Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica en la SEP. Debido a ello, se pueden encontrar libros de diversas calidades y propuestas para tratar los temas de estudio.

Por lo anterior se consideró conveniente revisar cómo se trata el tema de aceleración en uno de los libros de texto autorizados. Se hará referencia al texto escrito por Gutiérrez, Pérez y Medel (2012).

Se puede observar que los contenidos del libro siguen puntualmente la estructura del programa de estudios, comparando el tratamiento que propone el autor para los temas de movimiento con la Tabla 3.2, como se describe a continuación.

El movimiento en general se estudia en la primera lección del bloque 1, haciendo una distinción entre distancia y desplazamiento. En primer lugar se introduce la idea de marco de referencia o sistema de referencia, el sistema coordenado que permitirá medir longitudes y direcciones, a partir de un punto u origen que fija el observador. A este tema le sigue el estudio de la velocidad y la rapidez, el cual es explicado con ejemplos y se dan las definiciones de los conceptos. Sin embargo no se utilizan los marcos de referencia para describir el movimiento y se pasa al siguiente tema que se trata de la interpretación y representación de gráficas de posición contra tiempo; para lo cual se emplea nuevamente el plano cartesiano, pero ahora como modelo geométrico que representa el comportamiento de un fenómeno físico<sup>2</sup>.

La siguiente lección tiene que ver con otros tipos de movimiento como el ondulatorio, el cual se estudia comparando el concepto de rapidez lineal con el de rapidez de onda de un tren de ondas. Es hasta una lección más adelante que se comienza con el estudio de la caída libre, primero reflexionando sobre lo que se sabe intuitivamente sobre este fenómeno, para después hacer un experimento de caída libre con varios objetos de diversos tamaños, formas y pesos, lo que se espera que motive la confrontación de la experiencia con las ideas previas.

En un siguiente apartado se comparan las ideas de Aristóteles y Galileo. Para confrontar dichas ideas se propone un experimento mental, que tiene que ver con la anécdota de la torre de Pisa (se aclara que puede ser falsa), sobre la caída desde lo alto de la Torre, de dos balas de cañón de distintas masas, lo que supuestamente le permitiría comprobar a Galileo su teoría de que los cuerpos caen al mismo tiempo sin importar su masa. Al respecto, el experimento *pensado* puede ser útil, pero se introducen distractores que alejan la atención de los aspectos del movimiento y de las proporciones que guardan los tiempos y las distancias recorridas. Se hace necesario considerar la resistencia del aire y los posibles efectos de la masa, que son elementos que aunque se encuentran presentes no son imprescindibles para estudiar el movimiento

---

<sup>2</sup> En la experimentación se acostumbra usar la palabra comportamiento para referirse a los cambios en las propiedades de un sistema. En física un fenómeno físico es un sistema (Baird, 1991)

acelerado y que posteriormente se tratarán como despreciables, para centrar la atención en los tiempos y distancias recorridas.

Siguiendo con el texto de secundaria, se continúa con la introducción de datos históricos que tienen que ver con los estudios de Galileo sobre la cosmología, tal vez por el requerimiento del programa de SEP 2006, que pedía se tratara la aportación de Galileo a la ciencia. Seguidamente se comenta cómo se cree que Galileo realizó sus experimentos con planos inclinados. Concretamente el caso comentado en sus *Diálogos sobre las dos ciencias nuevas*; de la medición de tiempos comparados con la cantidad de agua que se almacenaba en vasijas.

La siguiente actividad que aparece en el libro de texto que se ha venido comentando consiste en realizar el experimento con el plano inclinado tomando tiempos con un cronómetro y marcando distancias de 20 centímetros sobre el plano. A partir de las mediciones obtenidas se pide a los estudiantes realizar las tablas correspondientes de tiempos y distancias, para modelar posteriormente el movimiento que se ha experimentado.

### **3.5 Reflexiones sobre la enseñanza del tema de aceleración**

Actualmente en México los programas oficiales muestran una tendencia en la enseñanza que tiene fundamento en las propuestas constructivistas, pero se trabaja con recursos que rememoran más los acercamientos conductistas, lo que representa un problema de congruencia. De hecho como lo refiere Flores-Camacho (2012), el material principal en las escuelas secundarias generales es el libro de texto. Aunque existen esfuerzos serios por diseñar y estructurar otro tipo de recursos didácticos que logran promover el uso de la tecnología de manera eficiente en el nivel básico, para mejorar la enseñanza de las ciencias, no han podido impactar desafortunadamente, a nivel nacional de forma permanente. Debido tal vez a los requerimientos técnicos, económicos y hasta políticos que implica el montaje de la infraestructura necesaria. Sin embargo, en regiones como en el Distrito Federal, se cuenta en algunas zonas escolares con recursos suficientes e infraestructura instalada que permitirían usar la tecnología como herramienta para potenciar el aprendizaje, en particular de las ciencias.

Existen problemas aún mayores a la utilización eficiente de la tecnología en la enseñanza de las ciencias.

En los programas de ciencias II (énfasis en física) existe una incongruencia entre la formación que se desea que tenga el estudiante y la selección de contenidos especializados. En estos programas existen cambios abruptos de lo concreto y cotidiano a lo formal y abstracto (por ejemplo, de la observación del movimiento de objetos comunes a las Leyes de Newton; de las características de materiales ordinarios a los modelos atómicos). Esto favorece poco a que los adolescentes avancen de una comprensión personal de los fenómenos y procesos estudiados (ligada a lo observable y práctico) para avanzar después firmemente hacia explicaciones y modelos abstractos (Flores-Camacho, 2012).

En el caso concreto del estudio de la aceleración, se requiere utilizar aspectos del movimiento como los marcos de referencia, la modelación matemática, las magnitudes escalares y vectoriales entre otros. Los marcos de referencia son muy importantes para el observador de un

movimiento, cuando se pretende describir trayectorias. De hecho, cuando se estudia mecánica clásica, se trata de sistemas de referencia inerciales, es decir, aquellos que se mueven en línea recta sin variar su velocidad (Hacyan, 1989, pág. 15); en donde no varían la fuerza, la masa, la aceleración y el tiempo (Resnik, 1999, pág. 160). Pero si lo que se va a estudiar es el comportamiento de un movimiento y no su trayectoria, o la aceleración como un invariante del sistema de referencia que proponga el observador (como magnitud escalar); entonces se requieren elementos de modelización matemática que le permitan al estudiante describir el comportamiento del fenómeno físico. El programa de estudios no hace la distinción sobre el estudio de la trayectoria o el comportamiento de un fenómeno, quedando a criterio de los autores de los libros de texto o sus evaluadores, que aspecto del movimiento se va a estudiar o incluso mezclarlos, como en el caso del libro Gutiérrez, Pérez y Medel (2012).

La referencia que se hace en el libro antes mencionado a la resistencia del aire o consideraciones referentes a la masa, tiene que ver con un estudio del movimiento que relaciona elementos de la dinámica (interacciones de las fuerzas). Elementos que pertenecen a la segunda Ley de Newton ( $F=m \cdot a$ ), en la que la aplicación de una fuerza determina la dirección del movimiento. Pero no es necesario iniciar con los conceptos de fuerza y masa, para estudiar el fenómeno de caída libre. En las palabras de Hierrezuelo y Moreno (1989), en el proceso de formación de un concepto, una etapa fundamental es la diferenciación del mismo de otros que pueden estar relacionados con él. Etapa en la que se van asignando a cada concepto aquellos atributos que le son específicos y que los distinguen de los demás.

En la mayoría de los libros de texto se acostumbra introducir capsulas históricas para enriquecer el conocimiento científico. En el caso del de Gutiérrez, Pérez y Medel (2012) se hace referencia a la leyenda de Galileo sobre el experimento de la torre de Pisa y la medición del tiempo con un instrumento llamado clepsidra.

Dicho caso de medición del tiempo ha causado discusiones serias entre los contemporáneos de Galileo e investigadores más actuales. De hecho hay quienes afirman que Galileo logró ser muy convincente cuando afirmó haber usado la clepsidra, para realizar sus mediciones de tiempos, pero las pérdidas de sustancia debidas tal vez al agua derramada o adherida a las paredes de los recipientes han generado dudas que han propiciado investigaciones más profundas.

Dichas investigaciones parecen al mismo tiempo ser más consistentes, como lo propone Drake (1975), al establecer la fuerte influencia de los conocimientos musicales de Galileo y su familia, propiamente de su padre y su hermano. Conocimientos que pudieron ser claves para determinar las relaciones entre las distancias recorridas y los tiempos transcurridos en la caída libre de los cuerpos. Sabiendo que al no tener instrumentos de precisión adecuados para medir el tiempo, Galileo tuvo que basarse en razones que relacionaban el tiempo y la distancia cómo se relacionan los sonidos con el ritmo de una escala musical. El trabajo de Drake (1975) también permite reflexionar sobre la gran precisión de los cálculos hechos por Galileo para poder demostrar la ley de caída libre. Al introducir información de investigaciones serias como ésta dentro de los libros de texto, se podrían trascender los conocimientos anecdóticos y fomentar mayoritariamente el conocimiento y valores científicos (Mathy, 1997; Slisko, 2008, citados en Hosson, 2011).

En lo que se refiere a la propuesta de graficación que se hace en el libro de texto que se describe en esta tesis, se ha mencionado que a partir de las mediciones obtenidas se pide a los estudiantes realizar las tablas correspondientes de tiempos y distancias, para modelizar posteriormente el movimiento que se ha experimentado, pero no se hace referencia a la modelización ni se dedica tiempo para su análisis; y se da por entendido que el estudiante hace la transferencia de saberes, entre el movimiento que se estudia, su representación algebraica y la modelización geométrica del mismo.

Como se ha mencionado antes, son varios elementos los que se conjugan para generar incongruencias.

En el caso específico del estudio de la aceleración, se requiere que los estudiantes reflexionen sobre el cambio, la razón de cambio, y reconocer sistemas de representación como el plano cartesiano, la geometría de la línea recta, la parábola y sus representaciones algebraicas. Elementos que se estudiarán en distintos momentos de su vida académica, pero por citar el caso relacionado con la modelización de matemática, se plantea el tema hasta el bloque III del programa de estudios de tercer grado de matemáticas en el nivel de secundaria y la razón de cambio de un proceso que se modela, hasta el bloque V del mismo programa, como se puede ver en las Tablas 3.3 y 3.4.

Bloque III			
COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> <li>Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.</li> <li>Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.</li> </ul>	<p><b>PATRONES Y ECUACIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.</li> </ul>	<p><b>FIGURAS Y CUERPOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.</li> <li>Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.</li> <li>Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.</li> </ul>	<p><b>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.</li> <li>Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.</li> </ul> <p><b>NOCIONES DE PROBABILIDAD</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).</li> </ul>

Tabla 3.3 Bloque 3 de estudio del programa de Matemáticas III (tomado de SEP, Matemáticas 2011, pág. 49)

## Bloque IV

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
APRENDIZAJES ESPERADOS	EJES		
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.</li> <li>• Resuelve problemas que impliquen el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.</li> <li>• Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.</li> </ul>	<p><b>PATRONES Y ECUACIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.</li> </ul>	<p><b>FIGURAS Y CUERPOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.</li> </ul> <p><b>MEDIDA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.</li> <li>• Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.</li> <li>• Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.</li> </ul>	<p><b>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.</li> </ul> <p><b>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.</li> </ul>

Tabla 3.4 Bloque 3 de estudio del programa de Matemáticas III (tomado de SEP, Matemáticas 2011, pág. 50)

### 3.6 Diseño de la Secuencia de Actividades

Tomando en cuenta los problemas planteados anteriormente con respecto a la carga de contenidos en el programa, las necesidades de las editoriales y la incongruencia entre los programas de estudios de física y matemáticas se consideró necesario hacer una propuesta didáctica alternativa. Las actividades que en ella se proponen pretenden involucrar al alumno, haciéndolo participe en la experimentación y modelización de un fenómeno físico. Se proponen situaciones en contexto que pretenden ubicar al alumno en situaciones más cotidianas en las que se puede justificar la necesidad de ciertos tratamientos matemáticos.

La secuencia didáctica propuesta en esta tesis se dividió en tres fases. La primera pretende que se logre la percepción del fenómeno a través de los sentidos y se identifiquen las variables que permitirán describirlo. La segunda fase se diseñó con la finalidad de analizar cómo cambia la distancia con respecto al tiempo en un movimiento uniforme. La tercera fase ofrece una forma de modelizar el fenómeno de aceleración auxiliándose de la tecnología, usando propiamente un procesador de video, hoja de cálculo, software de geometría dinámica y una simulación del movimiento de caída por un plano inclinado.

En cada fase se ofrecen distintas representaciones que modelizan el fenómeno de aceleración. Estas representaciones se van refinando gradualmente con la intención de formalizar el concepto de aceleración.

La primer parte de la segunda fase tuvo que ser sometida a tres validaciones externas, debido a que es mucho más complicado prever cómo reaccionará un alumno ante una situación experimental dada. Cabe mencionar que todos los participantes se mostraron motivados y colaborativos.

La secuencia didáctica que se describe a continuación está escrita en forma de hojas de trabajo que se organizaron en un cuadernillo. El cuadernillo consta de 7 Hojas de trabajo que en algunos casos se dividen en actividades con la finalidad de simplificar el tema de estudio correspondiente.

Cada hoja de trabajo va planteando preguntas abiertas que los estudiantes tendrán que responder individualmente o discutir en equipos de trabajo y posteriormente con el profesor de grupo.

Se diseñaron las siguientes secuencias de actividades, basadas en el modelo de enseñanza del cambio conceptual, considerando en ellas los problemas de aprendizaje asociados a cada planteamiento. Para cada pregunta propuesta se consideró una respuesta esperada que se identificará con la letra R, que ha sido validada internamente, con la finalidad de verificar su confiabilidad.

Se utilizará una nomenclatura que servirá de guía para el profesor de grupo sobre el nivel de actuación de los estudiantes: [A] cuando la actividad corresponde solamente al alumno, [C] cuando se trata de hacer consensos y [P] cuando el profesor hace intervención. Cuando aparecen combinaciones como [A, P], quiere decir que para responder las preguntas alumno y profesor deben intervenir.

### **3.6.1 Primera Fase: percepción del fenómeno e identificación de variables**

Esta fase consistió en brindarle al estudiante un primer acercamiento al fenómeno, pero del modo más simple que tenemos los seres humanos que es a través de los sentidos. Se trata de la primera forma de representación del fenómeno, una de tipo sensorial, pero que ya permite identificar el ritmo y su cambio, el tiempo en que se da este cambio y el desplazamiento de un objeto.

La primera hoja de trabajo es un cuestionario agrupado en dos páginas, que guía la observación sobre un experimento de caída por un plano inclinado de un balón que va tocando campanitas a su paso; las cuales se encuentran separadas a la misma distancia durante todo el recorrido. Concretamente se deja caer una esfera de metal (balón) sobre un perfil de ángulo de aluminio (como plano inclinado), sostenido por un soporte universal desde un extremo, el plano inclinado sostiene campanitas que se encuentran insertadas en pisapapeles separados a distancias iguales (ver Figura 3.1)



Figura 3.1 Configuración del sistema: plano inclinado

Los estudiantes tienen que marcar en el plano inclinado distancias iguales de aproximadamente 15 cm, dejar caer un balón (es decir, parte del reposo) que al chocar con cada campanita producirá un sonido que con respecto al siguiente ocurrirá en intervalos de tiempo cada vez más cortos.

Hasta ahora se requiere sobretodo de habilidades de observación en la extensión más amplia de la palabra, pues tienen que poner los sentidos en juego para poder percibir el fenómeno.

Luego deberán explicar con sus propias palabras lo que han percibido, deberán de pasar de una representación mental a una representación codificada de símbolos que es propiamente el lenguaje natural.

En la Página 1 del cuadernillo de actividades anexo se muestran las preguntas correspondientes a la primera página de la primera hoja de trabajo.

La siguiente experiencia de la primera hoja de trabajo consiste en modificar la distancia a la que se encuentran separadas las campanitas entre sí. Luego deberá contestar las mismas preguntas que en el caso anterior. Todo ello con la intención de que el estudiante compare sus respuestas y observe que mientras las campanas estén separadas a la misma distancia, el fenómeno se seguirá percibiendo de la misma manera.

Como tercera experiencia se modifica la elevación del plano inclinado, sin alterar la condición anterior con respecto a las campanas (ver Página 2). El estudiante contesta las mismas preguntas que en el caso anterior. Todo ello con la intención de que compare sus respuestas y observe que mientras las campanas estén separadas a la misma distancia y aunque se modifique la altura del plano inclinado, el fenómeno se seguirá percibiendo de la misma manera.

Por último se prevé un momento para la reflexión conjunta y planteamiento de conclusiones (Página 2).

Antes de iniciar la segunda fase de la secuencia didáctica se consideró pertinente realizar una breve actividad de repaso de proporcionalidad, que constituyó la segunda hoja de trabajo con una extensión de dos páginas. Ver Páginas 3 y 4.

Aunque sabemos por el currículo de secundaria, que se trata de un tema que debe ser ya conocido, es necesario partir de ideas comunes. Lo que se quiso enfatizar aquí fue cómo puede un factor hacer que una cantidad aumente o se reduzca, y que dicha cantidad no tiene que ser forzosamente un entero.

Algunos estudios como el de Mirjam, Doorden y Verschaffel (2011) refieren que la estrategia de enseñanza de valor perdido provoca el uso de razonamiento proporcional lo que va bien con la relación lineal de la rapidez contra el tiempo en un movimiento acelerado, pero no ayuda a aclarar las ideas cuando se busca la relación entre distancia recorrida y tiempo, en el mismo tipo de movimiento. Sin embargo, como un primer acercamiento se decidió mantener la estrategia de proporcionalidad, que sigue siendo válida si se toma en cuenta cómo cambia la posición con respecto al cuadrado del tiempo. Cabe mencionar que las actividades siguientes permitirán refinar la idea de cómo cambia la posición con respecto al tiempo.

El problema plantea la elección adecuada de la cantidad de ingredientes para un pastel, las cantidades están dadas en fracciones lo que es un poco más apegado a la realidad, y van aumentando conforme aumenta el tamaño del piso del pastel. El factor de proporcionalidad no siempre es entero, con la intención de se observe qué es lo que sucede con un producto, cuando uno de los factores es menor que uno, cuando es uno y cuando es mayor que uno. El ejercicio pretende hacer evidente el uso del factor de proporcionalidad, que se utilizan en la siguiente actividad.

### **3.6.2 Segunda Fase: Tiempo versus Distancia**

Esta fase consta de 5 hojas de trabajo que contienen distintas actividades que se describirán a continuación. La primera hoja de trabajo de esta fase consta de una experiencia y una actividad (ver Páginas 5 a 8 del cuadernillo anexo). En la experiencia se les solicitó a los estudiantes que ajustarán las posiciones de las campanitas para conseguir intervalos de tiempo constantes y observar cómo se relaciona el tiempo y la distancia recorrida. Las distancias ideales cumplen con la regla de los impares. Así que las campanitas deben quedar colocadas, la primera a 1 unidad del borde inicial, la segunda a 3 unidades de la primera, la tercera a 5 unidades de la segunda y así sucesivamente (en el orden de los impares), hasta terminar con la longitud del plano.

Los estudiantes deben ser capaces de establecer que las distancias se encuentran relacionadas como el cuadrado del tiempo.

Debido a las condiciones del medio era difícil determinar cómo plantear la actividad, por lo que se propuso una guía de trabajo que fue sometida a una primera validación, la cual se describe en la siguiente subsección.

### 3.6.2.1 Primera Validación

La primera validación se hizo con tres estudiantes elegidos al azar por su profesor de grupo. En esta primera prueba del experimento de esta parte de la secuencia didáctica no se controló la elevación a la que quedaría el plano inclinado. El estudiante determinó las distancias entre campanas, pero la elevación era muy baja y no se apreciaba ninguna regularidad entre las distancias medidas, como se puede ver en la descripción final que aparece en la Figura 3.2.

**Segunda Fase. Tiempo versus Distancia**

**Instrucciones:** Trabajen en equipo y contesten las siguientes preguntas.

En el experimento anterior las distancias entre campana y campana eran iguales.

1. Y, los tiempos que tardó el balón en recorrer esas distancias, ¿cómo fueron?  
Fueron disminuyendo

2. ¿Qué podrías hacer para que el ritmo que marquen las campanas sea en tiempos iguales?  
Tr aumentando la distancia entre cada campana

Primera Experiencia

Repitan el experimento de las campanas, cambiando las distancias. Recuerden que el sonido de las campanas debe marcar ahora un ritmo constante.

*Sugerencia: Te puedes auxiliar de un metrónomo a 60 golpes por minuto, de un cronómetro o del tic tac de un reloj de manecillas para medir tiempos iguales.*

Describan cómo quedaron distribuidas las campanitas en el aparato:  
Quedaron a distancias diferentes ya que van aumentando 14 cm, 20 cm,  
21 cm, 36 cm, 46 cm

Figura 3.2 Primera validación de la Hoja de trabajo de la segunda fase. Experimentación

Por la manera en que se construyó la segunda fase (ver Figura 3.3), no era posible saber la elevación que elegiría el alumno, ni mucho menos controlar la distancia que recorrería el balón como unidad. Así, al querer registrar en una tabla los resultados para poder analizar la regularidad en el avance de la distancia, los datos no permitieron al estudiante observar ningún patrón.

De los resultados de ésta validación y las actuaciones del estudiante se determinó que era necesario controlar la elevación, para poder observar las distancias que se esperaba que recorriera el balón; eliminar el caso ideal, puesto que sería bastante complicado determinar un caso ideal semejante al propuesto en el experimento y porque hasta ese momento las condiciones iniciales del mismo permiten mucha variación en la medida de la distancia.

Debido a los problemas comentados y a que los siguientes ejercicios de la actividad perderían el sentido se dio por terminada la prueba del experimento.

Una vez determinadas las distancias contesten lo siguiente:

- ¿Cuánto mide la primera longitud? 14 cm cm; llamen d a esa distancia.
- Entonces, la campana azul (la primera) se encuentra a 14 cm del borde del riel, es decir: a  $1 \times 14$  cm, o sea a  $1 \times d$  cm, o dicho de otra forma: 'una vez la longitud entre el borde del riel y la posición sobre el riel de la campana azul'.
- La siguiente marca se encuentra a ~~7~~55 cm del borde del riel, con números  $4 \times 14$  cm, con letras y números lo expresamos como: a 4 x d.
- Usando estas ideas completen la siguiente tabla:

Distancias recorridas por el balón desde el borde del riel	Caso Ideal	Diferencias
Del borde del riel hasta la campana azul	$1 \times 14$ cm = <u>14</u>	$1 \times 5 = 5$
Del borde del riel hasta la campana blanca	$4 \times \underline{\quad}$ cm = <u>    </u>	$4 \times 5 = 20$
Del borde del riel hasta la campana café	$9 \times \underline{\quad}$ cm = <u>    </u>	$9 \times 5 = 45$
Del borde del riel hasta la campana dorada	$16 \times \underline{\quad}$ cm = <u>    </u>	$16 \times 5 = 80$
Del borde del riel hasta la campana esmeralda	$25 \times \underline{\quad}$ cm = <u>    </u>	$25 \times 5 = 125$

Discutir en plenaria los resultados experimentales contra los valores ideales esperados.

Figura 3.3 Primera validación de la Hoja de trabajo de la segunda fase. Guía de observación sobre la distribución de las distancias recorridas por el balón.

### 3.6.2.2 Segunda Validación

La segunda validación se hizo con un estudiante del segundo grado, que se encontraba colaborando con el departamento de orientación, no se solicitó trabajar con más alumnos porque siempre se procuró interrumpir lo menos posible las actividades académicas.

**Segunda Fase. Tiempo versus Distancia**

**Instrucciones:** Trabajen en equipo y contesten las siguientes preguntas.

En el experimento anterior las distancias entre campana y campana eran iguales.

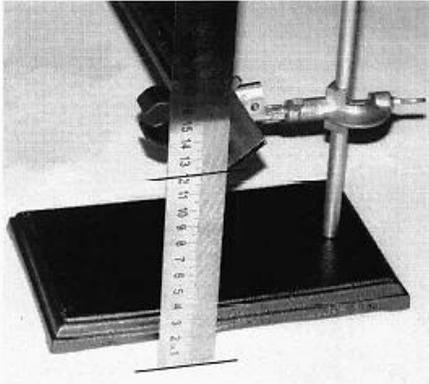
1. ¿Cómo eran los tiempos que tardó el balón en recorrer esas distancias?  
primero lento después rapido. Los tiempos se iban reduciendo
2. ¿Qué podrías hacer para que el ritmo que marquen las campanas sea en tiempos iguales?  
Separar las campanas

Figura 3.4 Segunda validación. Hoja de trabajo de la segunda fase. Preguntas 1 y 2

Tomando en cuenta que en la primera fase se trató de percibir con el oído la aceleración del balón al tocar las campanitas que estaban separadas a distancias iguales, para la segunda fase, se espera que el estudiante reconozca la necesidad de redistribuir las distancias entre las campanas, para poder encontrar un ritmo constante (ver figuras 3.4 y 3.5)

**Experiencia**

Elijan una longitud entre 12 y 13 cm para la altura del plano inclinado.



Nota: Se te proporcionará un metrónomo que marque 60 golpes por minuto.

a) Coloca el balón al inicio del riel. Sigue el ritmo del metrónomo con el oído.

Suelta el balón cuando escuches un golpe. Detén el balón al **segundo** golpe. Marca sobre el riel, el punto en donde detuviste el balón con una línea. A esa distancia la llamaremos  $d$ . Repite el proceso varias veces, hasta que decidas la mejor marca que corresponda a la distancia recorrida por el balón entre un golpe del metrónomo y el siguiente.

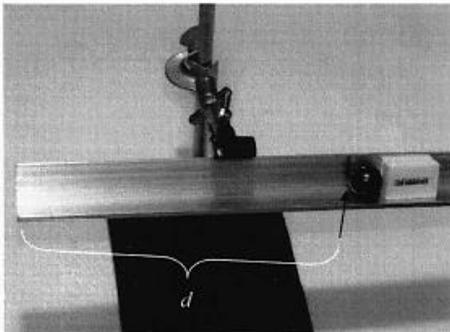


Figura 3.5 Segunda validación. Hoja de trabajo, segunda fase. Instrucciones e inciso a)

Producto de la validación anterior se controló la elevación del plano para 12 y 13 cm de altura y se pide al estudiante que realice el experimento para encontrar las distancias a las que hay que colocar las campanas, para que el ritmo se escuche constante. Además, se agregaron fotografías que ilustraran lo que se solicita, ver Figuras 3.5 y 3.6.

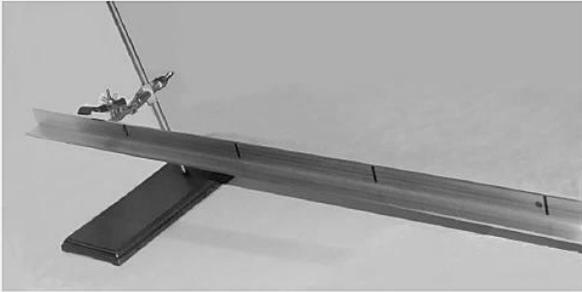
Lo que escribe el estudiante es cierto (ver Figura 3.6) aunque las distancias no corresponden a lo que se quiere mostrar en cuanto a la regularidad. Aquí probablemente, la elevación elegida por el estudiante no fue la mejor, al parecer unos cuantos milímetros sí son importantes.

Es necesario aclarar que las condiciones del experimento afectan sensiblemente los resultados. Se pudo observar que no sólo era necesario controlar la elevación, sino además el tamaño del balón con el que se hace la prueba y tomar en consideración el desnivel del suelo.

Una vez más hubo que interrumpir el experimento porque no podía apreciarse la regularidad esperada en las distancias recorridas por el balón, ver Figura 3.7, en la que también se muestra en la esquina derecha superior el corchete [P,A] que se refiere a trabajo de Profesor y Alumno.

b) Vuelve marcar la misma distancia seguida de la anterior a lo largo del riel con lo que quedará construida una regla.

c) Coloca el balín al inicio del riel. Sigue el ritmo del metrónomo con el oído. Suelta el balín cuando escuches un golpe. Detén el balín al tercer golpe. Marca sobre el riel, el punto en donde detuviste el balín, pero ahora con un punto. (Los puntos nos ayudarán a identificar los sonidos y diferenciarlos de las marcas de la regla). Repite el proceso varias veces para verificar la posición del balín en el tiempo correspondiente.



d) Coloca el balín al inicio del riel. Sigue el ritmo del metrónomo con el oído. Suelta el balín cuando escuches un golpe. Detén el balín al cuarto golpe. Marca sobre el riel, el punto en donde detuviste el balín, pero ahora con un punto. Repite el proceso varias veces para verificar la posición del balín en el tiempo correspondiente.

e) Coloca una campana Azul en donde marcaste el segundo golpe, una campana Blanca en donde marcaste el tercer golpe y una campana Café donde marcaste el cuarto golpe. (recuerda que el primer golpe le corresponde al momento en que sueltas el balín).



f) Verifiquen que los golpes del metrónomo coinciden con los sonidos de las campanas. De no ser así repite la experiencia desde el primer paso.

¿Podemos decir que hemos conseguido un ritmo constante? ¿Por qué?

Si, ya que veríamos las distancias haciendo que el tiempo sea mas constante al igual que el sonido

Figura 3.6 Segunda validación de la Hoja de trabajo de la segunda fase. Incisos b) a f)

Sin embargo, se pudo observar que si se controla la elevación, siendo ahora específicamente de 12 cm, tomando en cuenta la inclinación del piso y determinando el tamaño del balín se podría mejorar la apreciación del fenómeno.

Cabe mencionar que se requiere cierta pericia para medir utilizando el metrónomo pero es más sencillo que hacer que varios estudiantes midan con cronómetros distintos en distintas posiciones sobre el plano. Por ello, se determinó que era necesario proporcionar el plano inclinado graduado en las distancias que se requiere medir y hacer que el estudiante las observe; incluso que observe sólo su proximidad, de modo que se eviten algunos errores de sincronización entre el metrónomo y el observador, en la medición de las distancias.

Estrategia didáctica [P,A]

Una vez determinadas las distancias contesten lo siguiente:

- ¿Cuánto mide la distancia a la campana Azul?  
d = 24.2 cm,
- ¿Cuánto mide la distancia a la campana Blanca?  
41 cm ó aproximadamente 3 veces d
- ¿A qué distancia se encuentra la campana Café?  
         cm; ó aproximadamente 7 veces d

Figura 3.7 Regularidad. Estrategia didáctica

### 3.6.2.3 Tercera Validación

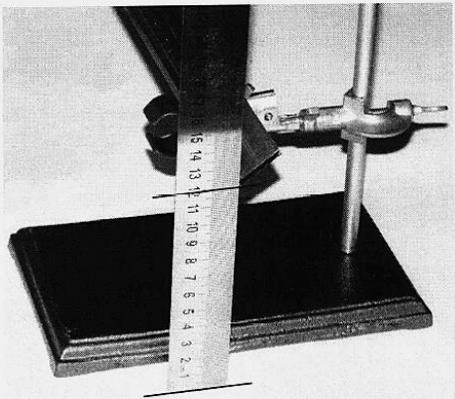
En la tercera validación participaron 5 alumnos de 2º grado, asignados para este trabajo por la dirección de la escuela debido a que no tenían ninguna actividad en ese momento. En la hoja de trabajo que se les dio, las preguntas 1 y 2 de no tienen modificaciones con respecto a la validación anterior porque han funcionado como un buen punto de partida.

Para la primera experiencia se les solicitó que elevaran el plano inclinado a 12 cm de altura, inmediatamente tendrían que comenzar a localizar las distancias que coincidieran con los golpes de un metrónomo (ver Figura 3.8). Se observó en este caso que el experimento resulta mejor si la elevación del plano se ajusta a 12.5 cm.

**Experiencia**

Eleva el plano inclinado a 12 cm de altura, como se muestra en la imagen.

Observa que el plano inclinado ya se encuentra graduado. Cada marca de la escala corresponde a una unidad de longitud que llamaremos d.



Nota: Se te proporcionará un metrónomo que marque 60 golpes por minuto.

Figura 3.8 Modificaciones a la Experiencia de la segunda fase, tercera validación.

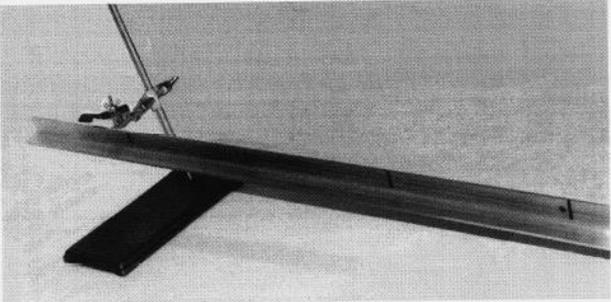
Por otra parte, por la continuidad con la actividad anterior, se debía aclarar primero que tendrían que quitar las campanitas del plano inclinado, para poder hacer el experimento

propuesto en esta fase. También se había omitido la indicación de repetir cada paso varias veces para verificar las distancias que el balón iría recorriendo.

Teniendo la precaución de tener el plano inclinado marcado a distancias iguales, al preguntar a qué distancia llegó el balón; se debe aclarar que se observe o se trate de localizar la marca más cercana; por lo que hay que repetir varias veces la actividad para determinarla. De éste modo en el inciso b), sólo sería necesario modificar el orden de las instrucciones para que se hagan las repeticiones necesarias (ver Figura 3.9).

Repita el proceso varias veces, hasta que decidas la mejor marca que corresponda a la distancia recorrida por el balón entre un golpe del metrónomo y el siguiente

b) Coloca el balón al inicio del riel. Sigue el ritmo del metrónomo con el oído. Suelta el balón cuando escuches un golpe. Detén el balón al **tercer** golpe.



¿Qué distancia recorrió? (recuerda que d es la unidad)  
4 Unidades.

Repita el proceso varias veces para verificar la posición (marca) del balón en el tiempo correspondiente.

Figura 3.9 Inciso b) de la experiencia de la segunda fase, tercera validación

Se observó que es necesario admitir que la respuesta a la pregunta del inciso c) sea aproximada o cercana, puesto que para el tercer golpe del metrónomo la medición ya es un poco más complicada (ver Figura 3.10).

c) Coloca el balón al inicio del riel. Sigue el ritmo del metrónomo con el oído. Suelta el balón cuando escuches un golpe. Detén el balón al **cuarto** golpe.

¿Qué distancia recorrió? (recuerda que d es la unidad)  
4 marcas aproximadamente

Repita el proceso varias veces para verificar la posición (marca) del balón en el tiempo correspondiente.

Figura 3.10 Respuesta a la pregunta del inciso c)

Luego viene un proceso de verificación de las distancias en los incisos d) y e) que al parecer no requirió de ninguna modificación.

Antes de terminar la experiencia y pasar a las preguntas finales que guían la observación del fenómeno de caída con ayuda del experimento se le debe dar al estudiante la opción de hacer un pequeño ajuste en la elevación del plano, de 5 mm, hacia arriba o hacia, según lo crea conveniente para que ajusten mejor las medidas del plano con los sonidos de las campanas.

Con los datos obtenidos al finalizar la experiencia se pretende que el estudiante pueda completar una tabla con las distancias recorridas y los tiempos transcurridos correspondientes, pero sólo se puede establecer la relación para dos intervalos de tiempo por la extensión del plano inclinado, por lo que será necesario dividir la tabla. El estudiante tendrá que completar la tabla sólo para dos intervalos de tiempo y suponer qué pasaría en dos intervalos de tiempo más, suponiendo también que tuviera un riel y una mesa más largos (ver Figura 3.11).

Estrategia didáctica [P,A]

Una vez determinadas las distancias contesten lo siguiente:

- ¿Cuánto mide la distancia a la campana Azul?  
una "d"
- ¿Cuánto mide la distancia a la campana Blanca?  
4 veces d
- ¿A qué distancia se encuentra la campana Café?  
9 veces d

Con estas ideas completa la siguiente tabla. Supondremos que tenemos un riel más largo y repitiéramos el proceso anterior para más tiempos:

		Tiempo transcurrido
Distancia a la campana Azul	<u>una "d"</u>	1 golpe o 1 segundo
Distancia a la campana Blanca	<u>4</u> veces d	2 segundos
Distancia a la campana Café	<u>9</u> veces d	3 segundos
Distancia a la campana siguiente (si la hubiera)	<u>16</u> veces d	4 segundos
Siguiente distancia	<u>25</u> veces d	5 segundos

Figura 3.11 Registro de datos en una tabla, tercera validación

Para que los estudiantes pudieran observar la regla de correspondencia entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido se propuso la siguiente actividad en el pizarrón:

Supongamos que escribo esta sucesión de números (al menos, los primeros términos):

¿Cómo seguirías en cada caso? (al menos tres números más)

{1, 2, 3, 4, 5, ...}                   continua: \_\_\_\_\_

{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}               continua: \_\_\_\_\_

{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}             continua: \_\_\_\_\_

{1, 4, 9, 16, ...}                   continua: \_\_\_\_\_

Las secuencias numéricas propuestas resultaron útiles para los estudiantes por lo que se consideró incluirla dentro de la hoja de trabajo de esta fase.

Si aún no hubiera advertido el estudiante la relación funcional, se propone hacer la siguiente relación de forma oral:

¿Cómo crece la distancia cada vez que el tiempo aumenta una unidad?

$$t = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

$$d = \{ 1, 4, 9, 16, \dots \}$$

La expresión en lenguaje natural de la regla de correspondencia entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido en un movimiento uniformemente acelerado se consideró un buen reforzamiento de lo observado, pero deberá hacerse después de contestar las secuencias numéricas.

Las estrategias propuestas anteriormente, sobre todo las que tienen que ver con la relación funcional entre la distancia y el tiempo surgieron en la intervención con los estudiantes al momento que intentaron responder las preguntas y solicitaron mayor información para poder contestarlas.

Se considera que esta segunda fase de la secuencia de actividades debe concluir con la idea de que la distancia es al cuadrado del tiempo, por una constante de proporcionalidad o factor de proporcionalidad. De dicho factor depende que la distancia aumente mucho en cada unidad de tiempo o no. Y que en ese factor esté incluida la aceleración.

$$d = (factor) \times t^2$$

Finalmente la guía de observación de la segunda fase quedó redactada como se muestra en las Páginas 5 a 7 del cuadernillo de actividades anexo.

Cómo se puede notar la relación funcional entre el cuadrado del tiempo y el factor de proporcionalidad con la distancia es una relación lineal por lo que se proponen preguntas que guían la observación de la proporcionalidad entre la distancia y el tiempo. Dichas preguntas se presentan en una actividad denominada *Actividad 1*, porque se trata de la primer actividad de la segunda fase de la secuencia de actividades (ver Página 8 del cuadernillo anexo).

#### **3.6.2.4 Repaso: Rapidez**

Antes de seguir trabajando con la aceleración, se consideró necesario hacer un repaso sobre la rapidez, puesto que el estudiante se debe apropiarse del lenguaje necesario para poder dar mejores explicaciones sobre el concepto de aceleración. No se considera un concepto ajeno, puesto que se encuentra dentro del currículo de matemáticas de primer grado y las actividades hasta ahora planteadas no requirieron dominar aspectos relacionados con el movimiento rectilíneo uniforme. Sin embargo, a partir de la actividad siguiente sí es necesario dedicar un tiempo para reconocer al movimiento rectilíneo uniforme.

*Actividad 1.* El repaso sobre rapidez se basó en un estudio hecho a la carrera de 100 metros planos de Usain Bolt en Berlín en el año del 2009. La primera actividad del repaso de rapidez recoge datos de una videograbación de la carrera que se puede ver desde la red de Internet en YouTube en la siguiente dirección: <http://www.youtube.com/watch?v=I70-ko7bAn0>

Las preguntas de observación pretenden que el estudiante recupere la información de la distancia recorrida en la carrera, que es de 100 m, el tiempo hecho por Bolt de 9.58 s, el cambio de posición con respecto al tiempo y el orden en la medición del tiempo para retomar las características de los números decimales (ver Página 9 del cuadernillo anexo.).

*Actividad 2.* La segunda actividad de repaso consiste en identificar que con los datos que se han recuperado de la carrera se puede construir un objeto matemático que es la línea recta, que posteriormente nos servirá de modelo para estudiar la rapidez en el Movimiento Rectilíneo Uniforme. Con ayuda de un software de geometría dinámica como Geogebra 4.2 podemos hacer dos registros de representación distintos, uno geométrico como una figura sobre el plano y otro gráfico como una tabla de valores que representan coordenadas en el plano como puntos (Página 10). Se eligió éste software para trabajar con los adolescentes porque les permite dibujar objetos matemáticos, en este caso líneas y puntos, al tiempo que los pueden relacionar con sus representaciones numérica y algebraica. Además se trata de un software que se puede obtener de forma libre por internet.

Para terminar la actividad se propone guiar a los alumnos a construir la siguiente conclusión (ver Página 11):

La representación anterior la podemos entender como el comportamiento de un objeto en movimiento o más específicamente la manera en la que corrió Usain Bolt. En esta representación despreciamos muchos factores, como son el tiempo de reacción, el viento en contra, el cansancio, la humedad, etc. En este caso podríamos pensar que estamos analizando la carrera de una máquina que se desplaza sin cambios debidos a los factores mencionados, un objeto que llamaremos Auto-Bolt, para diferenciarlo del corredor real.

Nos encontramos en el tránsito hacia la modelización. Para que la representación propuesta anteriormente sea válida es necesario despreciar factores ambientales que modifican el comportamiento del movimiento, que de considerarse lo alejarían de la representación de un MRU. Una vez que se le ha dado significado a los símbolos que representan a las variables que describen el movimiento, es necesario aclarar bajo qué condiciones los podemos utilizar como una representación válida (Duval, 1993/1998, pág. 175). Por ejemplo, en un MRU la distancia recorrida es:

$$d = v \cdot t$$

Pero en un MRUA la distancia recorrida es:

$$d = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

*Actividad 3.* Para la Actividad 3 del *Repaso: Rapidez*, una vez que se ha vuelto válida la línea recta como una representación del MRU, se interpolan algunos puntos de manera que se reconozcan como objetos que se encuentran sobre la línea recta, que pueden incluso pertenecer a ella. Una característica de la línea recta es la pendiente, la cual nos aporta mayor información sobre cómo se está realizando el movimiento; podemos entonces reconocer a la pendiente dentro de una tendencia lineal de puntos, pero además ésta nos brinda información de cómo cambia la posición con respecto al tiempo o sea la rapidez con que se realiza el movimiento (ver Páginas 12 a 17).

Es en éste punto se puede observar que para la producción de conocimientos pueden surgir; sobre todo en el contexto de las ciencias; sistemas semióticos totalmente diferentes que se vuelven cada vez más y más específicos e independientes del lenguaje natural (Duval, 1993/1998, pág. 176).

*Actividad 4.* Se intenta contextualizar el concepto de rapidez usando distintos casos, pero además se promueve la dimensión comparativa que permite a los estudiantes reconocer la razón de cambio al observar variaciones, en éste caso de la pendiente sobre un plano cartesiano, tal vez no con una precisión numérica, pero sí de forma perceptiva (ver Página 18 y 19). En éste caso, el coordinar distintas representaciones de la razón de cambio, se atrae la atención de los alumnos hacia las matemáticas y las gráficas proveen un ambiente óptimo para que los estudiantes demuestren su habilidad para utilizar su dimensión perceptiva (Confrey y Smith, 1994). Por otro lado, se proponen casos límite (los que se obtienen al asignar valores extremos de algunas cantidades) que motivan la reflexión sobre el fenómeno (Manzur, 2005, pág. 21).

*Actividad 5.* Con la Actividad 5 (ver Páginas 20 y 21) se intenta que el estudiante observe la tendencia lineal de un movimiento que parece ser a rapidez constante. En un primer momento se hace evidente al estudiante las variaciones más notables del movimiento, pero en un segundo momento se permite hacer una simplificación del problema para poder compararlo con un modelo matemático, el de la línea recta. Se debe identificar a la pendiente como una propiedad de la línea recta, que se refiere a qué tan rápido está cambiando el movimiento, incluso se pueden comparar dos pendientes en el mismo movimiento. Los datos del movimiento son reales, porque se pretende seguir contextualizando el fenómeno y han sido recuperados por La Asociación Internacional de Federaciones de Atletismo y la Federación Alemana de Atletismo, durante el XII Campeonato Mundial de Atletismo que se celebró en Berlín (Alemania) en agosto del 2009 donde Usain Bolt participó en la carrera de 100 m planos.

*Información complementaria.* Antes de continuar, consideramos necesario mostrar al estudiante (ver Página 22), cuáles son los códigos que se tienen que reconocer en el tratamiento algebraico de la geometría analítica de la línea recta. Cómo lo menciona Duval (1993/1998), para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiósis: formación de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. En este caso, el álgebra de la geometría analítica de la línea recta contribuye al tratamiento.

Una vez que se ha mostrado a manera de cápsula informativa el tratamiento de la línea recta como figura geométrica desde la sintaxis algebraica, se procede a su interpretación en un

contexto distinto, en el que se usa como modelo para representar el comportamiento de un fenómeno.

### **3.6.4.5 Rapidez media**

Experimentalmente, para estudiar un fenómeno se requiere poderlo representar matemáticamente. Comúnmente se comienza por recuperar los datos experimentales en una gráfica y luego se busca ajustar esos datos a una curva. Lo más sencillo es ajustar los datos a una línea recta, pero no todos los fenómenos pueden ajustarse tan fácilmente.

En el caso de la rapidez media, los datos experimentales se ajustan bastante bien a una recta, lo que nos permite usarla como un modelo matemático que nos representa el comportamiento de un movimiento a rapidez constante, o al menos casi constante.

El estudiante tendrá que aproximar una curva (en éste caso una línea recta) que se ajuste lo más posible a la tendencia de los datos. Aunque se podría proponer otro tipo de ajuste, como otros programas lo sugieren (Graphmatica por ejemplo propone ajustes a polinomios, Geogebra a cónicas), no se aportaría claridad al proceso de modelización de la rapidez media. Además la tendencia de los datos es visiblemente lineal.

En un primer momento el estudiante deberá ajustar una curva a la tendencia lineal de los datos manualmente (ver Páginas 23 y 24), luego encontrará su pendiente, todo ello con la finalidad de que reconozca con lápiz y papel el proceso que se lleva a cabo, para que en un segundo momento se realice el mismo proceso, pero auxiliándose de la herramienta (en éste caso Geogebra).

A continuación (ver Páginas 25 y 26) se pretende que con ayuda del ejercicio anterior se comparen los valores obtenidos experimentalmente con el modelo matemático propuesto, de manera que el estudiante pueda observar la aproximación en orden de magnitud de los datos a puntos sobre la línea recta en el tiempo correspondiente. Además se realiza un proceso de conversión entre el registro geométrico y el numérico. Las ventanas de Geogebra permiten observar tres registros distintos de conversión para la representación de la rapidez del movimiento de Usain Bolt, se puede ver por una parte el registro algebraico, por otra el geométrico y otra más como la tabla de valores que representan puntos sobre el plano, lo que va permitiendo según Duval (1993/1998) la construcción de un sistema semiótico como un registro de representación. Por otra parte, se reitera el hecho de que lo que se está modelando es la rapidez media. Se puede verificar la validez del tratamiento de los datos comparando el valor de la rapidez media calculado y el valor que aparece en el video de la carrera de Bolt.

### 3.6.2.5 Media ponderada

Se consideró importante observar el caso de la rapidez media como media ponderada, es decir, podemos considerar los momentos en que la rapidez parece seguir una tendencia constante.

En la sucesión de puntos, como se ha mencionado antes, se observan dos tendencias lineales al inicio de la carrera debidas seguramente a las condiciones del medio. Usain Bolt, lleva una rapidez menor, pero después de dos segundos su rapidez es mucho mayor. Para hacer esta observación más evidente, se le pide al estudiante que trace dos rectas; una para cada tendencia lineal que sugiere la nube de puntos y posteriormente se le pide que realice un tratamiento del registro aritmético, de modo que se calcule la rapidez con respecto a la razón en que se realizó cada parte del movimiento (Página 27).

### 3.6.3 Tercera Fase: Modelización

Como parte del proceso de refinamiento de actividades cognitivas, se propone ahora una modelización del fenómeno auxiliándose de la tecnología. Primeramente los estudiantes deberán armar el aparato para realizar el experimento de caída sobre un plano inclinado, para después grabarlo. Este video será procesado con un software llamado Avimeca 2.7, que permite la reproducción del fenómeno, casi cuadro por cuadro y proporciona distancias recorridas a escala de la pantalla de la computadora y tiempos transcurridos (ver Página 28). Avimeca 2.7 es un procesador de video que se puede descargar gratuitamente de algunas direcciones electrónicas como la de Espacio pedagógico - Rectorado de la Academia de Nantes<sup>3</sup> o la del Liceo General y Tecnológico Lavoisier-Mayenne<sup>4</sup>. Existen otros procesadores de video relacionados con la captura de datos provenientes de fenómenos físicos, sin embargo no son tan intuitivos. Otra característica importante es que no consume muchos recursos de memoria de la computadora, incluso no requiere instalación. Para que funcione correctamente, al igual que con otros procesadores de video, es necesario tener instalados en el sistema los codificadores de video adecuado que también se pueden descargar fácilmente de diversas direcciones electrónicas.

Ya que se cuenta con el video grabado y se han recuperado los datos de las distancias recorridas y tiempos transcurridos respectivamente, se observa la tendencia de los puntos y se propone una conversión de registros con ayuda de Excel 2007 (ver Página 29). Es decir, pasar de una gráfica de dispersión a una figura geométrica, en este caso, una parábola. Se decidió usar Excel 2007 porque la tabla de datos generada en Avimeca 2.7 se exporta sin ningún problema a esa hoja de cálculo, además de ofrecer línea de tendencia o regresión lineal, logarítmica o polinómica. Para este caso de estudio se requería aplicar línea de tendencia lineal y polinómica de grado 2. Un atributo que se aprovechó también fue la posibilidad de recuperar la ecuación de la curva que más se apega a la tendencia de los datos experimentales.

---

<sup>3</sup> [http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/1164913531453/0/fiche\\_\\_\\_ressourcepedagogique/&RH=1161017156140](http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/1164913531453/0/fiche___ressourcepedagogique/&RH=1161017156140)

<sup>4</sup> <http://lavoisier.paysdelaloire.e-lyco.fr/espace-pedagogique-d-etablissement/physique-chimie/documents-et-ressources/logiciels-gratuits-de-physique-chimie-5347.htm>

Aplicando el concepto de rapidez media, se pide a los alumnos realizar una aproximación cada vez más fina, hasta que se pueda observar que dependiendo de la aproximación en intervalos muy pequeños, se puede llegar a obtener la rapidez instantánea. Se mantiene vigente el proceso de conversión gráfico a geométrico, ahora relacionando el concepto de rapidez media con la secante, que dependiendo de la aproximación se puede convertir en una tangente (ver Páginas 30 y 31).

Luego con la intención de simplificar el problema de caída por el plano inclinado se propone realizar la modelización (ver Página 32), pero a partir de los datos que proporciona una simulación elaborada en Geogebra, lo que permite eliminar algunas condiciones del medio que podrían inducir a errores de medición.

Una vez que se recogen los datos de la simulación se le pide al estudiante que haga una gráfica en Excel, agregando una línea de tendencia polinómica de grado 2, y deberá recuperar además la ecuación propuesta por Excel para la línea de tendencia aplicada; todo ello con la finalidad de poder trazar la misma función en Geogebra y poder realizar un análisis dinámico, es decir, hacer trazos de curvas y puntos que se encuentran relacionados por reglas de correspondencia que pueden hacerse evidentes al desplazar los objetos con ayuda del software (ver Página 33). En ésta ocasión habrá que colocar un punto sobre la parábola obtenida anteriormente, y se trazará sobre ése punto la tangente. Considerando que la pendiente de la recta tangente es la rapidez instantánea, el estudiante deberá elaborar la tabla de rapidez contra tiempo correspondiente.

Con la tabla obtenida los estudiantes deberán obtener una gráfica de rapidez contra tiempo, sin abandonar la vista de la gráfica de distancia contra tiempo, de manera que sea posible observar al mismo tiempo tres registros de representación distintos (ver Página 34).

Por último, se pretende que los estudiantes reconozcan el área bajo la curva de una gráfica de rapidez contra tiempo como la distancia recorrida por un móvil en un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado y realizar el tratamiento correspondiente en algunos casos particulares (ver Páginas 35, 36 y 37).

Como se ha podido mostrar, la elaboración de una secuencia didáctica que tome en cuenta aspectos relacionados con las representaciones, la razón de cambio y la modelización matemática no es sencilla, sin embargo se propone con la intención de aportar una forma de trabajo dentro de un modelo de enseñanza. Se debe reconocer que no basta hacer propuestas al modelo de enseñanza, además se deben poner a prueba, observar cómo se comportan los estudiantes al hacer las actividades propuestas, sus actuaciones exitosas y las dificultades que enfrentan para finalmente poder hacer un análisis de lo que pudieron aprender con la aplicación de esta propuesta.

Para poner a prueba esta secuencia didáctica se instrumentó una experimentación educativa para la cual se debía contar con un grupo de segundo grado de secundaria, que es el nivel en el que se imparte la materia de física y en donde a su vez se estudia el tema de aceleración.

La experimentación educativa iniciaría con la aplicación de un pretest, con la finalidad de caracterizar las ideas previas de los alumnos. Posteriormente se planeó aplicar una secuencia didáctica de aproximadamente 24 sesiones de trabajo, durante las cuales se utilizaría como

material de apoyo un cuadernillo con las actividades propuestas y dosificadas, 4 sesiones en el laboratorio de física de la escuela y 20 sesiones en aula de medios o con una computadora y un proyector. Para las actividades prácticas se dotaría a los alumnos de 8 rieles de aluminio, 8 balines de  $\frac{3}{4}$  de pulgada y aproximadamente un ciento de campanitas de latón.

Las sesiones serían videograbadas con la intención de hacer un seguimiento de las actuaciones de los estudiantes.

Al finalizar las actividades propuestas en la secuencia didáctica se aplicaría un postest con la finalidad de analizar los aprendizajes alcanzados.

Como una evaluación alternativa de los aprendizajes se haría un ejercicio de embodiment (personificación) del movimiento, con ayuda de una cámara de video, y el patio de la escuela.

En el siguiente capítulo se reportan los resultados de la aplicación del pretest y el postest relacionados con la prueba.



# Capítulo 4

## ¿Cómo actúan los alumnos?

Se ha afirmado que para lograr el cambio conceptual con respecto al concepto de aceleración, se debe hacer uso de distintas representaciones del mismo fenómeno. En este estudio se experimenta una secuencia didáctica basada en dicha afirmación. El estudio consta de 5 etapas:

1. *Diseño de la Secuencia didáctica:* Del análisis de la componente formal, el marco teórico y la hipótesis planteada se consideró que la secuencia de didáctica debía contener distintos tipos de representaciones con códigos de significado de complejidad gradual, como: percepciones, representaciones numéricas, representaciones gráficas, representaciones geométricas y finalmente representaciones algebraicas. El proceso de diseño de la secuencia didáctica se describe en el capítulo 3. Fue necesario validar tres veces las partes de la secuencia didáctica en las que los estudiantes debían seguir instrucciones para hacer experimentación. Las particularidades y modalidad de cómo se aplican estas validaciones sus resultados se describen en las subsecciones 3.6.2.1 a 3.6.2.3. Se hicieron guías de observación para la secuencia didáctica estructuradas en hojas de trabajo. Con las hojas de trabajo se realizó un cuadernillo de actividades, el cual se anexa a esta tesis.
2. *Diseño de un pre-test:* Consiste en un cuestionario de papel y lápiz elaborado con el objetivo de identificar algunas ideas previas de los 43 estudiantes que participarán en la experimentación. Se aplica a un grupo de estudiantes de entre 13 y 14 años de edad, de 2° grado de secundaria de una escuela pública. Se describe en el apartado 4.1 de esta tesis.
3. *Experimentación:* Los alumnos de la escuela en donde se hizo la investigación cuyo documento es esta tesis, son estudiantes seleccionados de una amplia población, puesto que el plantel cuenta con una gran demanda aunque se trate de una escuela pública, situación que le ha otorgado prestigio a nivel estatal. Se aplicó una secuencia didáctica a un grupo elegido por la dirección de la escuela de 43 alumnos. Tuvo una duración de 28 sesiones de 50 minutos en las que se trabajó con un videoprojector, una computadora y una cámara de video. Se entregaron los cuadernillos para recuperar lo que los estudiantes escribieran sobre lo que van comprendiendo, a través de preguntas.

4. *Diseño de un post-test*: Cuestionario de papel y lápiz elaborado con la finalidad de hacer una evaluación sumaria, similar a una evaluación de tipo discriminatoria como las que se aplican para ingresar al nivel medio superior aplicado a los mismos 43 alumnos que contestaron el pretest y cuyos resultados se discuten en el apartado 4.2 de este capítulo.
5. *Embodiment*: Ejercicio de personificación que en el caso de la investigación cuyo trabajo es esta tesis, permite una evaluación alternativa de la capacidad de los estudiantes para interpretar el movimiento utilizando distintos registros de representación como, el lenguaje verbal y el gráfico.

Posterior a la experimentación se hacen los siguientes tipos de análisis:

*Análisis previo y posterior por bloque de pretest y postest*. El análisis previo del pretest y postest se realizó con base en la ingeniería didáctica como método de investigación, dentro de la dimensión cognitiva, haciendo la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori de ambos test por bloque. El análisis a priori tiene un carácter descriptivo y predictivo, lo que permite formular hipótesis sobre las actuaciones de los estudiantes. El análisis a posteriori se basa en los datos recolectados durante la experimentación, y permite validar o refutar las hipótesis planteadas al confrontarlo con el análisis a priori. El sustento de la ingeniería didáctica proviene de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997) y la teoría de la transposición didáctica de Chevallard (1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1997, citado en Campos E., 2006).

*Análisis de las hojas de trabajo*. Con las hojas de trabajo diseñadas para desarrollar la secuencia didáctica, se elaboraron unos cuadernillos que fueron entregados a cada alumno para que todos pudieran seguir las actividades. En el apartado 5.1, se describe la forma en que se seleccionaron algunos casos para darles seguimiento y la forma en que se hizo.

*Análisis del Embodiment*. Se propuso a tres niños del grupo de 43 estudiantes que hicieran una personificación de tres movimientos distintos. Se dividió a la parte del grupo restante en dos subgrupos, uno de niñas y otro de niños. Mientras el grupo de las niñas hacía la descripción verbal del movimiento y el grupo de los niños hacía la descripción gráfica del mismo. Al final se comparan todas las representaciones con una modelación de la experiencia con ayuda de Avimeca 2.7 como procesador de video. En el apartado 5.5 se discuten los resultados de su aplicación.

*Análisis global*: De los análisis mencionados se genera un análisis final, del que surgen las conclusiones de esta tesis que se comentan en el capítulo 6, divididas en 5 apartados de reflexión y uno de respuestas a la pregunta de investigación.

En la figura 4.1 se puede apreciar un esquema que muestra la relación entre cada una de las etapas del diseño de la metodología de la investigación.

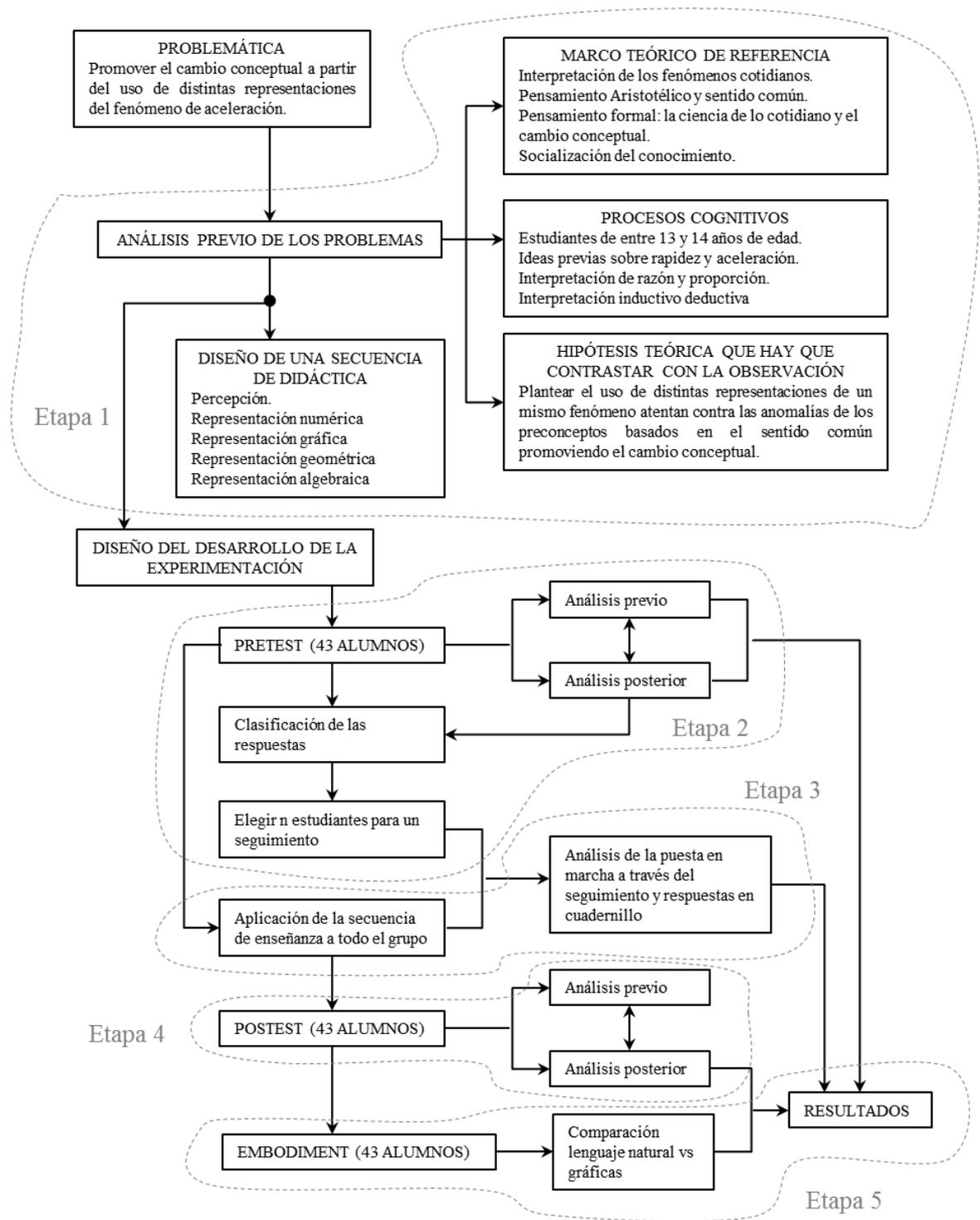


Figura 4.1 Esquema del diseño de la metodología de investigación

## 4.1 Pretest

El pretest aplicado a los estudiantes antes de iniciar la experimentación educativa fue diseñado con dos objetivos:

- clasificar las ideas previas de los estudiantes, y
- caracterizar la capacidad de los alumnos para reconocer distintos registros de representación, su coordinación, conversión y tratamiento.

El pretest se estructuró por medio de tres bloques de preguntas. El primero se refiere a ideas previas sobre el concepto de aceleración, el segundo a la coordinación del registro numérico, gráfico y geométrico, y el tercero bloque requiere de una interpretación adecuada del fenómeno que deberá expresarse en lenguaje natural. En los apartados siguientes se describen las preguntas del este cuestionario de papel y lápiz y también se exponen tanto los resultados de un análisis previo, como los del análisis de las respuestas de los estudiantes.

### 4.1.1 Ideas previas, bloque 1 del pretest

El primer bloque contiene 6 expresiones referidas a ideas previas del concepto de aceleración, ver Figura 4.1. Este bloque se diseñó con la finalidad de clasificar las nociones que tienen los estudiantes sobre el concepto de aceleración, por ello se le solicita al estudiante que lea varias afirmaciones, cada una de ellas es considerada una idea previa en si misma de acuerdo con los resultados obtenidos por Laburú y de Carvalho (1992) y Twigger y colaboradores (1994, ver Capítulo 2). El estudiante deberá evaluarlas como *correctas o incorrectas* para responder a esta pregunta. En el apartado siguiente se describen los resultados del análisis previo de estas expresiones.

1. Lee cada una de las siguientes afirmaciones y escribe “C” si consideras que es correcta o “IN” si consideras que se trata de una incorrecta.
  - a) Un móvil acelerado recorre distancias iguales en intervalos de tiempos iguales. \_\_\_\_\_
  - b) La aceleración es una variación de la velocidad. \_\_\_\_\_
  - c) Para que un objeto aumente su velocidad, es decir, que se acelere, se tendría que aplicar una fuerza que aumente constantemente. \_\_\_\_\_
  - d) La aceleración es un incremento de velocidad en un intervalo de espacio. \_\_\_\_\_
  - e) La aceleración es un incremento de velocidad en un intervalo de tiempo. \_\_\_\_\_
  - f) La velocidad final de un móvil depende de la aceleración. \_\_\_\_\_

Figura 4.2 Pregunta sobre ideas previas del concepto aceleración

#### 4.1.1.1 Análisis previo, Bloque 1, pretest

Los investigadores interesados en la influencia de las ideas previas en el aprendizaje de conceptos científicos han demostrado que las técnicas de enseñanza son más eficaces cuando se orientan hacia el cambio o la eliminación de los conceptos erróneos. Por esta razón es importante desarrollar técnicas e instrumentos para identificar y analizar las ideas previas que tienen los estudiantes.

Algunas de las técnicas más empleadas en la investigación de las ideas previas son: entrevistas, cuestionarios, evaluación de reglas o grabaciones en audio.

Cabe mencionar que Laburú y de Carvalho (1992) y Twigger y colaboradores (1994) han hecho una clasificación de las ideas previas sobre el concepto de aceleración de acuerdo con los criterios usados por los mismos estudiantes. Este análisis previo permite observar que el proceso de codificación de las expresiones relacionadas con los preconceptos de los estudiantes es complejo. Es difícil que los estudiantes comuniquen eficientemente sus ideas y que los profesores las interpreten adecuadamente, pues en la actualidad no hay una teoría ni un modelo (Mora y Herrera, 2009) aceptado universalmente, que explique la manera en la que se forman las ideas previas ni los conceptos científicos. Como resultado de este análisis se propone, además de las hipótesis de actuación de los estudiantes, formas alternativas de hacer los cuestionamientos, ya que para este nivel de edad no se dispone aún de pruebas basadas en índices de confiabilidad, como el *Mechanics Diagnostic Test* elaborado por Halloun y Hestenes (1984), que permitan reconocer las ideas previas de los alumnos sobre el concepto de aceleración (sobre todo en el contexto de la cinemática), para estos niveles académicos y rangos de edad (11 a 15 años).

Para la primera afirmación del bloque 1 (ver Figura 4.1) *a) Un móvil acelerado recorre distancias iguales en intervalos de tiempos iguales*, la percepción adecuada del fenómeno sería que esa aseveración es incorrecta. La hipótesis de actuación de los estudiantes es que la mitad de la muestra responda IN (Laburú y de Carvalho, 1992, pág. 67).

Es necesario aclarar que existe un caso límite al que se hará referencia en el análisis de estas expresiones; se trata del caso para el que la aceleración es cero. Con esto en mente, la idea que subyace en *a)* no sería falsa. Si la aseveración se formulara de otra forma, como por ejemplo, Un móvil que tiene aceleración recorre distancias iguales en tiempos iguales, entonces se evitaría la ambigüedad. Cabe mencionar que este tipo de afirmaciones conllevan una cuantificación implícita.

Con respecto a la afirmación *b) La aceleración es una variación de la velocidad* (ver Figura 4.1), la percepción adecuada del fenómeno es que se considere correcta. La hipótesis es que un tercio de los estudiantes conteste C (Laburú y de Carvalho, 1992, pag.68).

Nuevamente la expresión anterior es discutible cuando la aceleración es cero, porque en ese caso la velocidad es constante. Por lo que también debería reformularse la afirmación, por ejemplo como: La aceleración positiva o negativa es una variación de la velocidad.

En c) *Para que un objeto aumente su velocidad, es decir, que se acelere, se tendría que aplicar una fuerza que aumente constantemente*, la percepción que se considera adecuada es contestar que esa aseveración es incorrecta. La hipótesis es que todos los estudiantes de la muestra contesten C (Twigger y colaboradores, 1994, pág. 220-221) puesto que es un aspecto de la aceleración que se ha considerado fuertemente intuitivo. Es la única afirmación que toma en cuenta un aspecto dinámico porque es inevitable la observación de la presencia de una fuerza.

Esta intuición parte de la idea de sentido común que se refiere a que para que un cuerpo se mantenga en movimiento, es necesario que el cuerpo esté en interacción con una fuerza; lo cual es correcto dentro de un marco de referencia inercial como lo es la Tierra, no así, en el espacio. Además, es un planteamiento ambicioso puesto que en primer lugar asevera que la aceleración existe sólo cuando la velocidad aumenta, despreciando el caso de la desaceleración o aceleración negativa y por otro lado plantea la posibilidad de que para que se dé el movimiento con aceleración positiva, la fuerza tendría que estar incrementando cada vez, lo cual es innecesario, puesto que la segunda ley de Newton afirma que  $F=ma$ .

Cómo se ha planteado, se considera preferible hacer dos afirmaciones por separado, una que pudiera decir: Cuando un objeto en movimiento presenta un cambio en su velocidad, se dice que tiene aceleración o desaceleración. Y la otra: Todo objeto con aceleración o desaceleración se encuentra en interacción con una fuerza.

En el caso d) *La aceleración es un incremento de velocidad en un intervalo de espacio*, la palabra espacio parece haber sido utilizada como sinónimo de desplazamiento. La percepción adecuada del fenómeno corresponde a una calificación de la afirmación como incorrecta. La hipótesis de actuación de los estudiantes es que un tercio de la muestra conteste C (Laburú y de Carvalho, 1992, pág. 66).

La idea en la afirmación anterior se liga sólo a ser capaz de observar la variación de la velocidad como aumento y desprecia el decremento, pero cómo varía el tiempo o la distancia, no quedan definidos. Por otro lado, no se relaciona a la velocidad con la distancia porque en un movimiento acelerado ambas están variando con respecto a otra variable más, el tiempo. Es muy difícil simplificar esta idea, porque el estudiante está considerando un cambio en el tiempo, pero de forma implícita. Este tipo de interpretación, sugiere un punto de vista y tratamiento distintos para acercarse a la noción de aceleración que queda como propuesta de investigaciones futuras. Sin embargo se podría replantear la afirmación diciendo: La aceleración es un cambio en la velocidad.

Para la expresión e) *La aceleración es un incremento de velocidad en un intervalo de tiempo*, la percepción que se considera adecuada es contestar correcta. La hipótesis es que se espera que la mitad de la muestra conteste C (Laburú y de Carvalho, 1992, pág. 68).

Nuevamente en esta afirmación se desprecia el decremento de la velocidad a menos que la palabra incremento se entienda con signo. Por otra parte, dicha oración refleja una posición determinista, como si la aceleración no pudiera definirse con otras relaciones. La expresión se podría modificar como: La aceleración es un cambio en la velocidad en un intervalo de tiempo.

En f) *La velocidad final de un móvil depende de la aceleración*. La percepción correcta es contestar C (Laburú y de Carvalho, 1992, pag.65). La hipótesis es que contestará C, las tres

cuartas partes de la muestra. En esta afirmación subyacen nociones intuitivas y dificultades de la comprensión del concepto de velocidad semejantes a la del concepto de aceleración, que tienen que ver con el adelantamiento, una intuición elemental de término o meta y de orden. Por ejemplo, se puede comparar la posición de dos objetos en movimiento y considerar que aquel que está más adelantado es el que va más rápido, aunque el otro podría estar dándole alcance. Se puede considerar que el móvil que llega primero al final de un recorrido, podría ser más rápido que aquel que no lo hace. Lo que podría hacer la diferencia es el tiempo que tarde cada móvil en alcanzar una rapidez máxima.

La propuesta de modificación para la afirmación descrita en *f)* podría quedar como: La aceleración o desaceleración depende de cómo cambie la velocidad.

Cabe comentar finalmente que indagar sobre cómo se construyen las ideas previas o cuáles son los procesos de codificación que se llevan a cabo, sobre las nociones o preconcepciones de los alumnos de 12 y 13 años de edad sobre el concepto de velocidad y aceleración escapa del objeto de estudio del presente trabajo. Porque se está considerando la universalidad que las caracteriza, como se ha comentado y descrito ya en el capítulo 2. Pero sí se ha tenido la intención, de utilizar los estudios que se han realizado para reconocerlas y tomarlas como punto de partida de esta investigación. Por lo que no se encontrará en ninguno de los test aplicados, algún ítem que pretendiera descubrir algún concepto alternativo adicional.

#### 4.1.1.2 Análisis posterior, Bloque 1

De los resultados obtenidos en la aplicación se desprende la información que aparece en la Tabla 4.1 en la cual también se comparan los datos con las hipótesis planteadas.

		TIPOS DE RESPUESTA Y PORCENTAJES					
		Resultados			Percepción adecuada del fenómeno	Hipótesis de actuación de los estudiantes	
		No Resp	IN	C			
1a	Un móvil acelerado recorre distancias iguales en intervalos de tiempos iguales	1	32	10	In	50%	C
		2%	74%	23%			
1b	La aceleración es una variación de la velocidad		2	41	C	33%	C
			5%	95%			
1c	Para que un objeto aumente su velocidad, es decir, que se acelere, se tendría que aplicar una fuerza que aumente constantemente		2	41	In	100%	C
			5%	95%			
1d	La aceleración es un incremento de velocidad en un intervalo de espacio		21	22	In	33%	C
			49%	51%			
1e	La aceleración es un incremento de velocidad en un intervalo de tiempo		11	32	C	50%	C
			26%	74%			
1f	La velocidad final de un móvil depende de la aceleración		7	36	C	75%	C
			16%	84%			

Tabla 4.1 Caracterización de los estudiantes según su nivel de percepción

Algunos de los datos proporcionados por Laburú y de Carvalho (1992) y Twigger y colaboradores (1994, pág. 220-221) coinciden con los resultados obtenidos en el primer bloque del pretest, de hecho ellos afirman que los resultados deberían ser consistentes en otros casos distintos de situación socioeconómica y de grupos que han recibido cursos previos de Física.

Si se observan las columnas de resultados de la Tabla 4.1 y se comparan con la columna de percepción adecuada del fenómeno, se podría afirmar que los estudiantes de esta muestra, en general tienen una buena percepción del fenómeno de aceleración. El caso más relevante es el que se muestra para el inciso d), para el que las respuestas están divididas casi al 50%, lo que confirma las observaciones hechas por Laburú y de Carvalho (1992, pág. 70) en cuanto a que para muchos estudiantes, el tiempo actúa como un factor distorsionador del concepto de aceleración, porque lo relacionan directamente con el desplazamiento o simplemente lo consideran implícito. Se confirma también que en la comprensión (Laburú y de Carvalho, 1992, pág. 71) del concepto de aceleración entran en juego como variables, la velocidad, el tiempo, conceptos de magnitudes instantáneas y razones de proporcionalidad. De todas ellas el más difícil de observar y medir es el tiempo. Sin embargo, como se ha detallado ya en la secuencia de actividades propuesta, utilizar una perspectiva musical o rítmica brinda más posibilidades perceptivas de la variable, como lo propone Conde (2009).

Otro resultado que se destaca es el del inciso c), en el que a pesar de lo discutible de la afirmación de Twigger y colaboradores (1994), los estudiantes coinciden totalmente con la presencia de una fuerza que aumente constantemente.

En este bloque no se dio la instrucción oral ni por escrito de que la afirmación que no supiera calificar el estudiante la dejara en blanco. De ese modo se hubiera podido medir el azar, usando el criterio de restar a las respuestas correctas las incorrectas. Por lo que se propone otro criterio para descartar respuestas que podían haber sido contestadas aleatoriamente.

El criterio consiste en hacer una correlación entre las afirmaciones propuestas y elaborar una clasificación de acuerdo con los grupos de respuestas dadas.

En la Tabla 4.2 se muestran las respuestas agrupadas según los criterios propuestos por Laburú y de Carvalho (1992) de mayor comprensión del fenómeno a menor, que servirán para observar contradicciones, lo que nos podría dar idea del azar o el nivel de confusión al contestar el bloque.

Se confirma también la tendencia a pensar que la aceleración sólo depende de los cambios en la velocidad, ignorando los cambios en el tiempo o en el desplazamiento.

Los datos también muestran la persistencia en la idea de que exista aceleración en movimientos uniformes (Laburú y de Carvalho, 1992, pag. 66).

Luego se establecen dos tipos de contradicciones que correlacionan los incisos b), e) y d) por un lado y b), d) y f) por otro.

- Criterio bed: Reconoce a la aceleración como una variación de la velocidad, pero no acepta que la aceleración sea un incremento de velocidad en un intervalo de tiempo. Pero también podría no estar reconociendo al tiempo como variable.
- Criterio bdf: Acepta la aceleración como variación de la velocidad y rechaza que la velocidad final dependa de la aceleración.
- Por último existe un criterio en el que se aceptan afirmaciones distintas para un mismo concepto de aceleración.

Si se discriminan las respuestas basadas en estos criterios, estaríamos frente a un 44.2% de azar o de confusión sobre el concepto de aceleración.

Afirmaciones	Tipos de respuestas														Total
	Número de estudiantes por criterio y porcentaje														
	16	3	5	3	1	1	1	4	2	2	1	1	1	2	
	37.2%	7%	11.6%	7%	2.3%	2.3%	2.3%	9.3%	4.7%	4.7%	2.3%	2.3%	2.3%	4.7%	43
a)	IN	C	IN	IN	IN		C	IN	IN	C	C	IN	C	C	
b)	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	IN	IN	C	
c)	C	C	C	C	C	C	IN	C	C	C	IN	C	C	C	
d)	IN	IN	C	C	C	IN	C	C	IN	C	C	C	C	C	
e)	C	C	C	C	IN	C	C	IN	IN	IN	IN	C	C	C	
f)	C	C	C	IN	IN	IN	IN	C	C	C	C	C	IN	C	
	Percepción adecuada del fenómeno	Percepción casi adecuada	Sólo observan el cambio en la velocidad	bdf	bdf	bdf	bdf	bed	Acepta afirmaciones distintas para un mismo concepto						

Tabla 4.2 Correlación de respuestas para encontrar criterios de contradicción

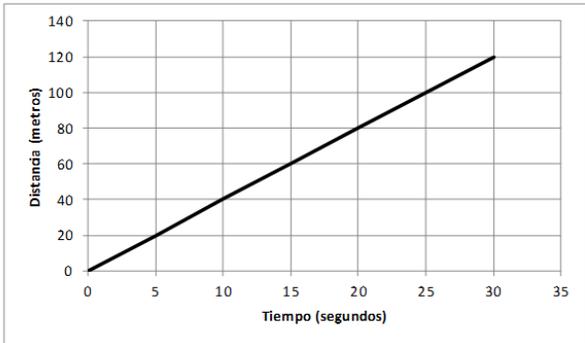
Finalmente se puede observar que cerca de la mitad de los estudiantes (55.8%) parecen tener una percepción adecuada del fenómeno, considerando la columna de percepción adecuada y casi adecuada, sin embargo persisten problemas con la identificación de las variables que intervienen en el fenómeno de aceleración (tiempo, distancia, velocidad) ligadas a las preconcepciones de los alumnos, ideas que se pretenden atacar y someter a un conflicto cognitivo por medio de la secuencia de actividades para intentar modificarlas por un conocimiento más científico.

#### 4.1.2 Coordinación de registros, bloque 2 del pretest

El bloque 2 del pretest está formado por una pregunta tomada de la Guía de Estudio del COMIPEMS (2009). Como se puede ver en la Figura 4.2, el estudiante deberá elegir la respuesta correcta de entre cinco propuestas. Existe una única respuesta y su elección sólo

dependerá de las habilidades que tenga el alumno para interpretar el registro gráfico que se le propone y el concepto con el que se asocia.

2. La siguiente gráfica muestra la relación entre la distancia recorrida por un móvil y el tiempo empleado en alcanzar cada una de estas posiciones:



Tiempo (segundos)	Distancia (metros)
0	0
5	20
10	40
15	60
20	80
25	100
30	120

A partir de ésta información podemos afirmar que:

- A) La aceleración que experimentó el móvil es  $50 \text{ m/s}^2$
- B) El móvil mantuvo constante su posición
- C) La velocidad del móvil fue de  $100 \text{ m/s}$  después de 20 segundos.
- D) El móvil mantuvo constante su velocidad
- E) La velocidad a los 4 segundos fue de  $20 \text{ m/s}$

Figura 4.2 Coordinación de registros, Bloque 2

#### 4.1.2.1 Análisis previo, Bloque 2, pretest

La pregunta del bloque 2 del pretest versa sobre un gráfico de distancia contra tiempo en el que se dibuja una línea recta ver Figura 4.2. En los incisos C) y E), se le proponen al estudiante opciones que están relacionadas con el cálculo numérico de la velocidad. En la opción A) se le propone al alumno un valor para la aceleración distinto de cero, pero sobre la gráfica de distancia contra tiempo se dibuja una línea recta, entonces la aceleración es constante igual a cero, por lo que no es necesario el cálculo numérico. La opción B) hace referencia a la posibilidad de que la posición se mantenga constante, lo que negaría el movimiento. La línea recta dibujada sobre una cuadrícula permite observar puntos que se intersecan con los ejes coordenados que hacen evidente una relación entre lo subido y lo avanzado en cada punto de intersección con la recta. Dicha relación establece una razón entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido, cuyo cociente es constante en cada punto de intersección con la recta. Se considera como una percepción adecuada del fenómeno si se elige como respuesta la letra D) *El móvil mantuvo constante su velocidad.*

La hipótesis es que los alumnos estudiarán este tipo de representaciones hasta el penúltimo bloque del programa de estudios del tercer grado (SEP, 2011) de la materia de Matemáticas, por lo que se considera que contarán con pocos elementos para interpretar adecuadamente el fenómeno. Se consideró relevante no alterar la pregunta, porque interesa enfrentar al estudiante

a una situación como la que se le presentará al postularse al ingreso a la educación media superior, momento en el que el estudiante podría haber ligado ya, las representaciones geométricas vistas en tercer grado de la materia de Matemáticas con los contenidos experimentales vistos en segundo grado de Física de secundaria.

#### 4.1.2.2 Análisis posterior, Bloque 2

De las cinco opciones para responder a la pregunta planteada tenemos que un 11.6% eligió la respuesta A) *La aceleración que experimento el móvil es de  $50m/s^2$* . Al parecer no reconocen que las variables que se están relacionando son la distancia y el tiempo y que cuando la razón es constante entre ellas lo que se dibuja en una gráfica de distancia contra tiempo es una línea recta. Cuando la razón no es constante, como en el caso del movimiento uniformemente acelerado, lo que se dibuja en la gráfica es una media parábola. Se trata de una situación que proviene directamente de la modelización matemática.

Otro 13.9% eligió la letra B) *Mantuvo constante su posición*, por lo que se podría suponer que los estudiantes no asocian la distancia registrada sobre el *eje* y con la posición que tiene el móvil en cada momento, sin embargo puede reconocer la constancia en algún elemento de la gráfica que se le presenta, probablemente la línea recta, que en realidad refiere el cambio de posición.

El 11.6% responde C) *La velocidad del móvil fue de  $100m/s$  después de 20 segundos*, puesto que se señala el tiempo del recorrido ( $100m/s$  en 20s), lo que se tendría que reconocer es la correspondencia con la distancia recorrida, que se marca con ayuda de la recta dibujada, para después determinar la razón. Por la forma en que se presentan los datos en el gráfico es difícil considerar un error de paralaje.

Un 41.8% eligió la letra D) *El móvil mantuvo constante su velocidad*, que se relaciona con la percepción adecuada del fenómeno, se requiere relacionar la distancia recorrida con el tiempo transcurrido y reconocer que la razón entre las variables como cociente determina el valor de la velocidad, que es el mismo durante todo el recorrido. De no considerarse la razón, se podría observar el cambio entre lo subido y lo avanzado que permanece constante a lo largo de la línea recta, lo que permite que se vea continua. Se podría hacer una interpretación deductiva (Touma, 2009) del fenómeno argumentando que en una gráfica de distancia contra tiempo a velocidad constante el modelo matemático que lo describe mejor es una línea recta. Para ello debía conocerse el proceso de interpretación inductivo del fenómeno para el que se requieren observaciones particulares provenientes de la experimentación.

Por último el 2.3% contestó E) *La velocidad a los 4 segundos fue de  $20m/s$* . Al parecer la coincidencia de los valores propuestos con los números que aparecen en el gráfico sirvió como distractor para no observar otros elementos de la gráfica. Parece que estos estudiantes tampoco consideran otras relaciones como lo subido contra lo avanzado o la razón de la distancia con el tiempo.

Haciendo nuevamente una correlación entre las respuestas para descartar elecciones aleatorias, tenemos que un 4.6% contestó B) y D), lo que muestra la falta de coordinación entre los

registros del lenguaje natural con el registro gráfico y numérico. La elección de esta combinación implicaría que el móvil estuviera en reposo, pero entonces la modelación del fenómeno dibujaría una línea recta pero horizontal.

Para un 4.6% la elección fue A) y D), lo que podría ser cierto si la aceleración fuera cero. Por tanto se considera que el estudiante no está consciente, como en las situaciones anteriores de los casos límite.

Para los casos en que se eligió alguna combinación como A) y E), A), B) y C), B), C) y D), B), D) y E), pareciera que no se reconocen los registros gráfico, numérico y geométrico. En cada caso un 2.3% hace este tipo de combinaciones.

Sumando los porcentajes de las respuestas correlacionadas en el párrafo anterior se puede decir que un 18.4% contestó de forma contradictoria o azarosa.

Consistentemente con el bloque anterior, cerca de la mitad de los estudiantes tienen una percepción adecuada del fenómeno.

En este análisis se ponen de manifiesto los problemas relacionados con el dominio de los registros de representación semiótica y la identificación de variables.

Respuestas a las preguntas correspondientes al segundo bloque del pretest	Porcentaje de elección
A) La aceleración que experimentó el móvil es $50 \text{ m/s}^2$	11.6%
B) El móvil mantuvo constante su posición	13.9%
C) La velocidad del móvil fue de 100 m/s después de 20 segundos.	11.6%
D) El móvil mantuvo constante su velocidad	41.8%
E) La velocidad a los 4 segundos fue de 20 m/s	2.3%
Correlación B Y D	4.6%
Correlación A Y D	4.6%
Correlación A Y E	2.3%
Correlación A, B Y C	2.3%
Correlación B,C Y D	2.3%
Correlación B, D Y E	2.3%

Tabla 4.3 Correlación de las respuestas a las preguntas del bloque 2

### 4.1.3 Interpretación del fenómeno, bloque 3 del pretest

El bloque 3 consta de una gráfica de rapidez contra tiempo, con tres cambios en el comportamiento del movimiento (ver Figura 4.3), en la primer parte la recta tiene una pendiente positiva, lo que está relacionado con un movimiento acelerado, puesto que la variación de la rapidez es constante y creciente, luego la recta se vuelve horizontal,

representando un movimiento a rapidez constante con cero aceleración y por último la recta cambia a inclinación negativa, lo que representa un movimiento desacelerado o con aceleración negativa. Se propuso esta pregunta con la finalidad de observar la capacidad del alumno para describir lo que le muestra la gráfica.

#### 4.1.3.1 Análisis previo, Bloque 3, Pretest

El estudiante describirá con sus propias palabras cada parte del movimiento, haciendo referencia al tipo que se presenta. Igual que en el caso anterior, la hipótesis es que el estudiante podrá reconocer sólo algunos elementos de la representación.

La interpretación correcta de las gráficas de los bloques 2 y 3 requiere que el estudiante reconozca varios registros de representación semiótica y lleve a cabo el proceso de coordinación entre varios registros. En estas preguntas no se ha puesto énfasis en el tratamiento algebraico de la información representada. Se necesita tener experiencia en la interpretación deductiva en el sentido de Touma (2009) para reconocer los conceptos implícitos que se presentan en el registro gráfico. Debido al tratamiento hecho en el currículo del nivel primaria se espera que los estudiantes interpreten crecimientos o decrecimientos en alguna de las variables que se grafican.

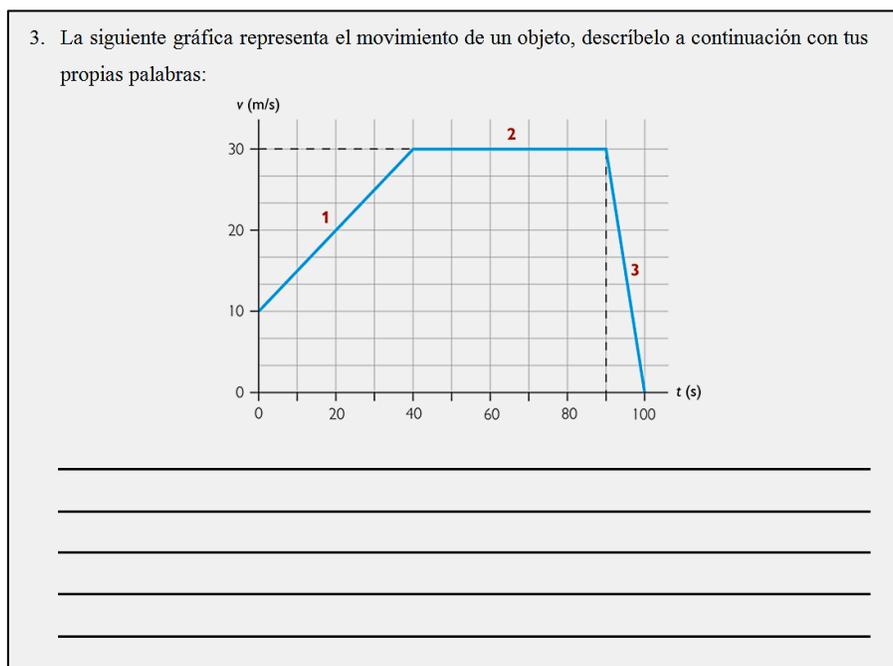


Figura 4.3 Interpretación del fenómeno

#### 4.1.3.2 Análisis posterior, Bloque 3

De acuerdo con el tipo de respuestas proporcionadas por los estudiantes, se hizo la categorización de las respuestas que se presenta en la Tabla 4.4. En la columna denominada

Categoría se menciona el tipo de registro que el estudiante está reconociendo, en la siguiente columna, como su nombre lo indica, se describe la forma en como el estudiante reconoce el registro y en la última columna denominada Tabla está anotado el número de tabla que mostrará ejemplos de la categoría correspondiente.

Categoría	Descripción	Tabla
Registro Numérico	El estudiante reconoce algunos elementos del registro numérico, no reconoce qué magnitud se está representando en el <i>eje y</i> , pero sí puede hacer referencia a los números de las coordenadas en dónde hay cambios en la tendencia lineal. No distingue entre los datos que lee en las abscisas de los que lee en las ordenadas, además utiliza múltiplos y submúltiplos del tiempo invariablemente.	4.5
Registro Gráfico	El estudiante interpreta algunos elementos de la gráfica de velocidad contra tiempo, pero los relaciona con una gráfica de distancia contra tiempo (Laburú y de Carvalho, 1992) o simplemente como movimiento.	4.6
Tendencias	El alumno interpreta las tendencias de las líneas que observa en el gráfico y las relaciona con algún elemento del movimiento.	4.7
Rapidez por la rapidez	El alumno reconoce la rapidez sobre el <i>eje y</i> , pero no dice nada más sobre algún otro elemento del gráfico.	4.8
Razones	El estudiante observa la proporcionalidad en la tendencia lineal, por intervalos.	4.9
Esquemas	El estudiante relaciona una imagen (la gráfica) con un objeto físico.	4.10
Coordinación de registros	El estudiante coordina adecuadamente los registros para dar una interpretación del fenómeno cualitativa y cuantitativa.	4.11

Tabla 4.4 Categorización de reconocimiento de registros

<p>Hace un movimiento de diez minutos a 90 segundos para y avanza a 100 segundos que se dividen en 3 partes y una de 30 minutos.</p> <p>Y se recorren de diez a a 40 de 30 a 40 de 40 a 90 de 90 a 100.</p>
<p>Esto empieza a partir de los diez metros llegando en una recta diagonal avanzando a 10 m por 20 segundos, al llegar a los 30 metros y 40 segundos comienza una recta horizontal avanzando los 90 segundos y después descender en una diagonal disminuyendo los metros y llegando a los 100 segundos.</p>
<p>1) El móvil recorrió 20 m en 40 segundos                  2) Recorrió 30 m en 60 segundos                  3) El móvil recorrió 60 m en 10 segundos</p>

Tabla 4.5 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Registro Numérico

<p>que en la primera fue de 40 segundos x 30 metros  y en la segunda mantuvo la distancia pero de 40 a 90  segundos y en la tercera bajo la distancia de 90 segundos a  100 segundos</p>
<p>El móvil u objeto mantiene su aceleración hasta los 30 m/s  y de ahí mantiene su posición hasta los 90 m/s y va  disminuyendo sobre la misma aceleración hasta los  30 m/s 100. hasta detenerse finalmente.</p>
<p>El móvil avanza 10 metros cada 20 segundos</p>
<p>En el punto uno avanza 20 m en 20 s en el segundo  punto el objeto avanza 30 m en 65 s y el tercer punto  el objeto avanza 20 m en 100 s</p>

Tabla 4.6 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Registro Gráfico

<p>Como fue aumentando y como se mantuvo y bajo  las ciertas cifras.</p>
<p>El objeto avanzo 30 metros en 40 segundos en la  primera línea o distancia en la segunda avanza en  recta en la línea de 30 m/s después de 10 en  línea diagonal al número 100</p>
<p>Recorrió en 3 tipos de líneas rectas</p>
<p>Un objeto fue aventado de 10 m y luego a los 30 m y de ahí siguió su trayectoria  y se detuvo el cuerpo</p>
<p>El cuerpo se mueve a una velocidad  constante.</p>

Tabla 4.7 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Tendencias

<p>El objeto comienza desde 0 con una velocidad de 10 m/s después recorre una línea diagonal hasta el número 40 con una velocidad de 30 m/s, manteniendo la misma velocidad ahora llega al número 90 después disminuye su velocidad de 30 a 0 en el número 100</p>
<p>El móvil viaja a 10 metros por segundo en el número 1, después alcanza los 30 metros y finalmente acaba con los 100 t (s).</p>

Tabla 4.8 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Rapidez por la rapidez

<p>la velocidad que cambia o se necesita de una fuerza para que el móvil pueda avanzar, también la velocidad se mantiene constantemente.</p>
<p>Conforme avanza metros/segundo el tiempo se reduce en algunas ocasiones va igual en tiempo y en metros.</p>
<p>El objeto cada vez que aumentan el tiempo por lógica aumenta los metros recorridos y la velocidad a la vez en algunas ocasiones</p>
<p>Cuando aumenta la velocidad, recorre más distancia en menos tiempo</p>

Tabla 4.9 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Razones

<p>es la parte de un auto que se llama tablero es la parte de enfrente del auto</p>
<p>Para mí me parece una parte de un carro o camion o también puede ser de una camioneta o como una galleta de la división o de una raíz cuadrada.</p>
<p>Es un carro</p>

Tabla 4.10 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Esquemas

<p>la grafica indica que el objeto salio disparado a 10 m/s y fue acelerando hasta los 30 m/s despues mantuvo la velocidad durante 50 segundos y despues es como si hubiera frenado para que en 10 segundos bajara a 0 m/s</p>
<p>El objeto se mueve rapidamente de los 10 m/s a los 30 m/s, mantiene esa velocidad luego a los 90 m/s y despues para a los 100 s.</p>
<p>Primero el movil se mantuvo a pmerzo a 10 m/s y fue acelerando mas rapido hasta llegar a 30 m/s y se mantuvo unas segundos esa velocidad y disminuyo hasta 0 m/s o más bien se detuvo por completo</p>

Tabla 4.11 Ejemplo de respuestas clasificadas en la categoría Coordinación de registros

El caso más relevante es el de los estudiantes cuyas respuestas se muestran en la Tabla 4.11, ellos coordinan varios registros, lo que les permite dar una explicación adecuada del fenómeno, pero, no los excluye de ser influidos en otro momento por sus propios preconceptos erróneos o los de sus pares. Es necesario recordar que las ideas previas se refuerzan por la convivencia con sus compañeros o por la propia naturaleza del pensamiento. La observación de fenómenos, su modelación matemática y coordinación de registros de representación, sirve como reforzamiento para el pensamiento científico.

## 4.2 Postest

El postest fue diseñado con la finalidad de observar la actuación de los estudiantes al contestar preguntas hechas en pruebas de selección para ingresar al nivel medio superior, después de haber interactuado alrededor de 30 días con secuencias didácticas diseñadas para promover el cambio conceptual con respecto a la aceleración y sus variables. La hipótesis general es que los alumnos serán capaces de reconocer distintos registros de representación, su coordinación, conversión y tratamiento. Además de poder hacer interpretaciones de tipo inductivo-deductivas.

El postest está estructurado por medio de tres bloques de preguntas que serán descritas en los siguientes apartados. El primer y segundo bloques requieren de la coordinación del registro numérico, gráfico, geométrico y una interpretación inductivo-deductiva.

Después de describir las preguntas planteadas en el postest se podrá revisar tanto los resultados del análisis previo como el de las respuestas de los estudiantes.

Para la aplicación del postest la matrícula del grupo se redujo a 42 estudiantes, de los cuales se obtuvieron los resultados que se describen en la sección siguiente.

#### 4.2.1 Coordinación de registros, bloque 1 del Postest

La pregunta del bloque 1 del postest es la misma pregunta del segundo bloque del pretest ver Figura 4.4, pero se modifica un poco la gráfica de manera que haya más líneas de referencia para observar la tendencia de la línea recta que se dibuja y se marcan algunos puntos.

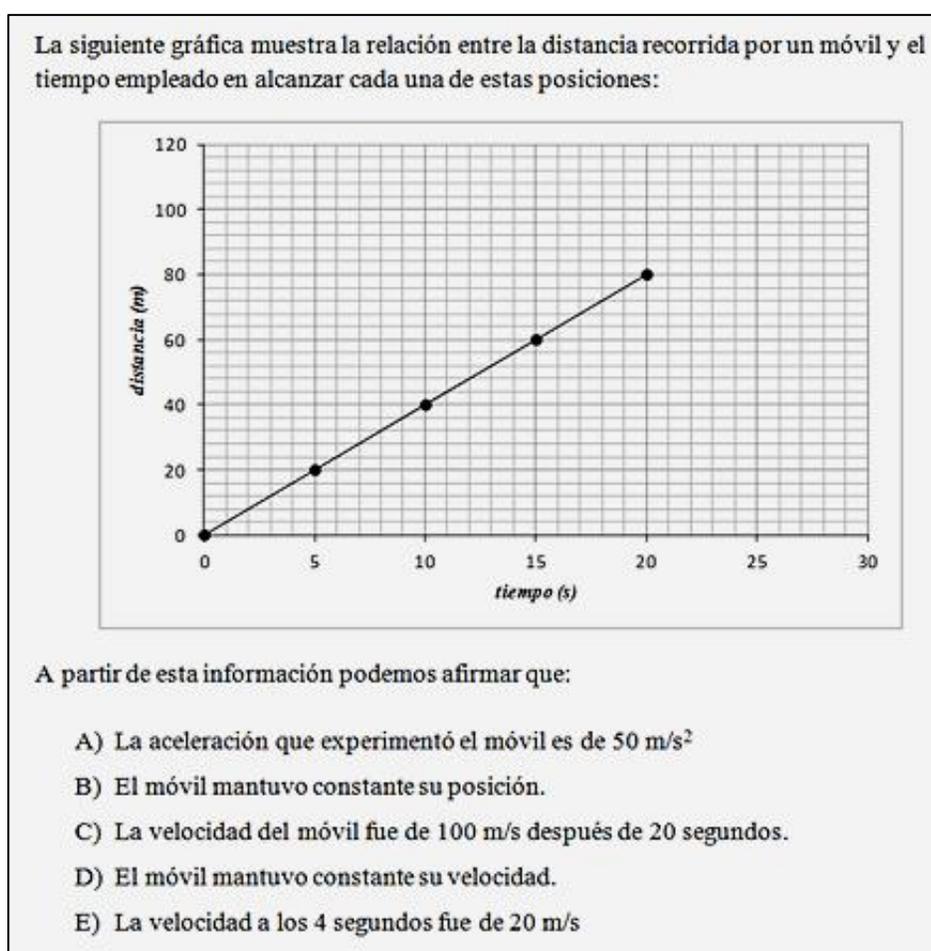


Figura 4.4 Coordinación de registros, bloque 1 del Postest

##### 4.2.1.1 Análisis previo, Bloque1, Postest

Se espera que el estudiante relacione este ítem con una interpretación deductiva en el sentido de Touma (2009).

Debido a que el estudiante ha recogido datos de una experimentación de un fenómeno a través de las secuencias didácticas y ha reflexionado acerca de lo que los datos significan y lo que representan, se espera que la respuesta elegida sea la letra D), *El móvil mantuvo constante su velocidad.*

#### **4.2.1.2 Análisis posterior, bloque 1 del Postest**

De las cinco opciones para responder la pregunta 1 del bloque 1 del pretest, 81% de los estudiantes contestó D), el 12% eligió C), el 5% combinó C) y D) y el 2% combinó B) y D). Con respecto al pretest lo estudiantes han discriminado ya las letras A) y E), se considera que un 19% pudo haber contestado de forma azarosa, pero un 81% se centró en la elección de D) *El móvil mantuvo constante su velocidad.* Sin embargo, existe aún una tendencia de pretender determinar el valor de la velocidad, como uno de los valores propuestos. La idea de que lo que permanece constante es la posición casi quedó eliminada, de hecho queda asociada a la constancia en la velocidad por un estudiante.

#### **4.2.2 Interpretación deductiva, bloque 2 del Postest**

La pregunta del bloque 2 del postest es una pregunta que también se ha tomado del COMIPEMS (2009), ver Figura 4.5, en el que se nombran dos tipos de movimientos el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Para ambos casos se presentan dos posibilidades de representación gráfica en las que se compara la distancia contra tiempo. En un caso el movimiento parte sin haber recorrido ninguna distancia y en el otro caso parte de una distancia distinta de cero.

##### **4.2.2.1 Análisis previo, Bloque2, Postest**

La gráfica con la cual se representa el movimiento rectilíneo uniforme es línea recta con pendiente positiva que parte del origen o de una distancia conocida. Para el caso del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se representa con una media parábola que parte del origen o de una distancia conocida. El estudiante deberá reconocer que el movimiento rectilíneo uniforme es representado por líneas rectas en gráficos de distancia contra tiempo y que el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es representado por medias parábolas en gráficos del mismo tipo. La interpretación deductiva del registro gráfico es más sencilla, cuando ya se ha hecho un proceso de interpretación inductiva, proveniente del tratamiento gráfico de datos recogidos de una experimentación de un fenómeno. La respuesta esperada es la afirmación indicada por medio del inciso C que agrupa correctamente los casos indicados.

##### **4.2.2.2 Análisis posterior, Bloque 2, Postest**

Al asociar los movimientos rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado con sus respectivos modelos matemáticos que representan su comportamiento en gráficas de distancia

contra tiempo tenemos que un 19% eligió la letra A), al parecer no han diferenciado los modelos para cada tipo de movimiento. Un 7% eligió la letra B) otro 7% D), 2% E) que refieren la misma situación que en el caso A), 60% eligió C) que es la modelación correspondiente a cada tipo de movimiento, 2% combinaron A) y C) y otro 2% combinaron B) y D) lo que implica confundir los modelos. Por los resultados obtenidos se puede apreciar que el dominio de los registros gráficos y su interpretación como modelos del comportamiento del movimiento no es sencillo de adquirir aunque más de la mitad contestaron correctamente.

Relaciona los tipos de movimiento con las gráficas que los representan.

Tipos de movimiento:

- I. Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)
- II. Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA)

Gráficas

a.

b.

c.

d.

A) I: a,c - II: b,d  
 B) I: a,d - II: b,c  
 C) I: c,d - II: a,b  
 D) I: b,d - II: a,c  
 E) I: b,c - II: a,d

Figura 4.5 Interpretación deductiva, bloque 2 del Postest

### 4.2.3 Coordinación de registros y tratamiento algebraico, Bloque 3 del Postest

El último bloque del pretest contiene un problema de tratamiento numérico y algebraico ver Figura 4.6.

Un móvil cambia uniformemente su velocidad de 5 m/s a 15 m/s en 10 segundos, ¿cuál es su aceleración?

A)  $20 \text{ m/s}^2$

B)  $10 \text{ m/s}^2$

C)  $1 \text{ m/s}^2$

D)  $-10 \text{ m/s}^2$

E)  $5 \text{ m/s}^2$

Figura 4.6 Coordinación de registros y tratamiento algebraico, Bloque 3 del Postest

#### 4.2.3.1 Análisis previo, Bloque 3, Postest

El alumno deberá recuperar la definición de aceleración y expresarla preferentemente en lenguaje algebraico para después realizar el debido tratamiento numérico con los datos proporcionados por el problema, ver Figura 4.6. Se entiende que para utilizar el lenguaje algebraico el estudiante tendrá que pasar por varios procesos de representación y coordinación de registros. Al menos del lenguaje natural al lenguaje algebraico y finalmente al numérico. La respuesta esperada es la que se encuentra en el inciso C).

#### 4.2.3.2 Análisis posterior, Bloque 3, Postest

Resolver un problema de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado requiere reconocer, interpretar el registro del lenguaje natural, pasar al registro algebraico y finalmente al registro numérico. Se puede observar que D), ha sido discriminada por los estudiantes, tal vez porque un valor negativo de la aceleración aún no tiene significado para el estudiante. Algunos pudieron haber sumado los cambios en la velocidad e ignorar el cambio en el tiempo por lo que 12% eligieron A). Un 48% elige B), identificando bien el cambio en la velocidad pero despreciando el cambio en el tiempo. La respuesta correcta que es la del inciso C) fue elegida por el 17% de los estudiantes, obligo a una alumna a hacer uso del registro algebraico y numérico, para poder determinarla, ver Figura 4.7. En otro caso 24% eligieron  $5\text{m/s}^2$ .

2. Un móvil cambia uniformemente su velocidad de 5 m/s a 15 m/s en 10 segundos, ¿cuál es su aceleración?

A) 20 m/s<sup>2</sup>  
B) 10 m/s<sup>2</sup>  
C) 1 m/s<sup>2</sup>  
D) -10 m/s<sup>2</sup>  
E) 5 m/s<sup>2</sup>

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$
$$a = \frac{15 - 5}{10} = 1$$

Figura 4.7 Tratamiento algebraico

Se puede apreciar que para todos los bloques de preguntas, la posibilidad de contestar correctamente radica en el dominio de la coordinación de los distintos registros de representación que haya adquirido cada estudiante y también de una correcta interpretación deductiva, no así del tratamiento o conversión de los registros de representación semiótica.

# Capítulo 5

## Resultados en el aula

A continuación se exponen los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica a los estudiantes de secundaria. Se proporcionó un cuadernillo de actividades a cada uno como el que viene adjunto a esta tesis. Conforme se desarrollaron las sesiones, los educandos debían responder las preguntas correspondientes a cada actividad propuesta en las hojas de trabajo. La mayoría de las sesiones se grabaron en video con la finalidad de contar con datos suficientes que permitieran poner en evidencia la ocurrencia de un cambio en la forma de conceptualizar.

El criterio de selección de los estudiantes obedece al mostrado en la Tabla 4.1. Los nombres de los alumnos cuyo trabajo se considera importante para exponer las respuestas escritas se muestran en la Tabla 5.1. Adicionalmente se harán algunos comentarios de sus argumentaciones orales. La descripción de los resultados se realizará por fases, las mismas de que consta la secuencia didáctica. En los casos que se consideraron relevantes se incluyen diálogos de los estudiantes o con el profesor o sus argumentaciones, a los cuales se agrega la referencia con el registro en video correspondiente a pie de página.

### 5.1 Resultados de la aplicación de las secuencias didácticas

Con base en la clasificación realizada en el apartado 4.1.1.2, sobre las ideas previas de los estudiantes encuestados, se eligieron algunos cuadernillos representativos de los estudiantes asociados a cada criterio con la intención de analizar las respuestas de los alumnos en la búsqueda de algún cambio en la formación de los conceptos en torno al tema de aceleración. En la tabla 5.1 se pueden encontrar los datos de la selección de los estudiantes por nombre y criterio correspondiente.

Con la intención de recuperar mayor información se cuenta además con la grabación en video de algunas sesiones. Sin embargo, únicamente se hará referencia a las respuestas e intervenciones de los alumnos que se consideren relevantes para evitar la repetición de casos.

Criterios	Estudiantes
Percepción adecuada del fenómeno.	Paula Adrián
Percepción casi adecuada del fenómeno	Alberto
Sólo observan el cambio en la velocidad	Alfredo
bdf: Reconoce a la aceleración como una variación de la velocidad, pero no acepta que la aceleración sea un incremento de velocidad en un intervalo de tiempo. Aunque también podría no estar reconociendo al tiempo como variable.	Koinda Daniela Francisco Joaquín
bed: Acepta la aceleración como variación de la velocidad y rechaza que la velocidad final dependa de la aceleración.	Josué Fernando Guillermo Jonathan Daniel Eduardo
Acepta afirmaciones distintas para un mismo concepto.	Claudia

Tabla 5.1 Selección de 15 estudiantes para seguimiento.

## 5.2 Primera fase. Percepción del fenómeno e identificación de variables.

La primera fase se diseñó con la finalidad de reconocer las variables que intervienen en el fenómeno de aceleración desde la percepción de los sentidos (ver Capítulo 3), lo que proporcionará a los estudiantes una primera representación del fenómeno con qué comenzar a resolver tareas y hacer actividades relacionadas con este fenómeno. Para simplificar la observación, se fijó la distancia mientras el tiempo y la velocidad cambiaban. Como se ha comentado (Laburú y de Carvalho, 1992) la variable más difícil de percibir en un movimiento acelerado es el tiempo, mientras que la velocidad es confundida comúnmente con la distancia. Pero con ayuda de la práctica musical, como lo hizo probablemente Galileo (Drake, 1975) y como lo propone recientemente Conde (2012), el tiempo se puede reconocer de una forma más natural y sencilla.

En la primera experiencia algunos alumnos se resisten a ver el cambio en la velocidad o en el tiempo, el cambio lo asocian con la distancia, aun cuando las distancias recorridas son iguales y en las instrucciones se estipula que la distancia en la distribución de las campanitas en el plano inclinado es fija y es la misma. No es de sorprender que surja la situación descrita anteriormente, pues es una característica común de las ideas previas. Para algunos estudiantes es difícil incluso reconocer la distribución de las distancias sobre el plano inclinado. En el siguiente diálogo se captaron algunas expresiones de los estudiantes en este sentido, que evidencian la problemática de poder relacionar variables y la dificultad que enfrentan al hacer su descripción verbal de la experiencia observada<sup>5</sup>:

Profesor: -¿Cómo son las distancias entre campanas sucesivas?

Alberto: -Están a 15 cm

Profesor: -Descríbemelas, ¿cómo son?

<sup>5</sup> Video 9-sep, 1ªfase-1ªexp, min 13:20

Alfredo: -Son de 15 cm

Profesor: -No quiero saber el número. Si estuvieran unas a 15, otras a 18, otras a 20. Sería diferente que todas estén a 15. ¿Qué quiere decir que todas estén a 15? ¿Cómo son las distancias entre una y otra?

Guillermo: -Proporcionales.

Profesor: -Bueno, pueden ser proporcionales. Pero la proporción es la misma ¿no? Entonces no tiene caso que diga proporcionales. Es la misma proporción es uno a uno, no es al doble, entonces ¿cómo son?, no tiene caso decir proporcionales, más sencillo todavía, ¿cómo son las distancias entre una y otra y otra?

Alfredo: -¿Iguales?

Profesor: -Iguales, eso es todo, anótalo.

Los estudiantes tratan de describir el fenómeno a partir de cómo consideran que cambia la distancia, lo que se puede observar incluso en sus respuestas por escrito, aun sabiendo que han fijado las distancias, ver la Figura 5.1:

**Primera Experiencia**

Coloca campanitas sobre el riel de aluminio a 15 cm de separación entre sí. Pon un balón al comienzo del riel y suéltalo. Tapa tus ojos y escucha. Después solamente lee las siguientes preguntas. Repite el experimento dos veces más, discute lo que hayas observado y escuchado con los miembros de tu equipo; contesta cada una de las siguientes preguntas en la sección de R. Exp. 1:

1. ¿Cómo son las distancias entre campanas sucesivas?

R.Exp.1: las distancias son iguales	R.Exp.2: empezamos a notar que por la velocidad y fuerza del balón la distancia de las campanas cambia	R.Exp.3: comprobamos que la distancia era de más de 15 cm
-------------------------------------	--	---

Figura 5.1 Daniel, pág. 1, pregunta 1

En cuanto al tiempo, se observaron dos respuestas interesantes. La primera que describe cómo cambia la variable en el fenómeno de caída se muestra en la Figura 5.2:

2. ¿Cómo son los intervalos de tiempo entre los sonidos producidos por campanas sucesivas?

R.Exp.1: Son de corto tiempo	R.Exp.2: Más cortos que antes	R.Exp.3: Aun más cortos por la altura
------------------------------	-------------------------------	---------------------------------------

Figura 5.2 Daniela, pág. 1, pregunta 2

La segunda respuesta relaciona al ritmo con la velocidad del balón como se ve en la Figura 5.3:

2. ¿Cómo son los intervalos de tiempo entre los sonidos producidos por campanas sucesivas?		
R.Exp.1: el sonido era lento	R.Exp.2: el sonido era de menos o mas	R.Exp.3: notamos que el sonido fue mas rapido

Figura 5.3 Daniel, pág. 1, pregunta 2

La última pregunta de la primera experiencia se propone para percibir cómo cambia la rapidez de caída del balón, relacionándola con el ritmo, no en el sentido amplio dentro del contexto musical, sino como una alternativa que permita adquirir un lenguaje para explicar el fenómeno. Como lo hace una niña cuando se le ha preguntado qué es el ritmo y lo explica de la siguiente manera<sup>6</sup>:

Profesor: -¿Alguien me puede decir cómo era el ritmo del balón al caer?

Koinda: -Primero el ritmo era un poquito lento cuando bajaba el balón, luego en el segundo es más rápido, porque nosotros lo pusimos a 10 y como que era menor separación y eso hizo que el ritmo fuera más rápido, igual se iba aumentando la velocidad y el sonido conforme iba bajando y en la tercera como estaba más inclinado duró menos el sonido, pero fue más rápido el ritmo.

Hay quienes identifican al ritmo y lo relacionan con la velocidad o quienes solamente hacen referencia al cambio, como se muestra en las Figuras 5.4 y 5.5:

3. Describe el ritmo (sucesión de sonidos) que marcan las campanas durante el recorrido del balón.		
R.Exp.1: El ritmo <del>incremen</del> ta de velocidad y se hace más grave	R.Exp.2: constante	R.Exp.3: constante

Figura 5.4 Fernando, pág. 1, pregunta 3

3. Describe el ritmo (sucesión de sonidos) que marcan las campanas durante el recorrido del balón.		
R.Exp.1: Cada vez es más rapido	R.Exp.2: Cada vez es más rapido	R.Exp.3: aun más rapido

Figura 5.5 Daniela, pág. 1, pregunta 3

La segunda experiencia se diseñó con la intención de que los estudiantes modificarán la separación entre las campanitas, sin modificar la altura del plano inclinado y al contestar las mismas preguntas notar que el fenómeno de aceleración se vuelve a percibir. A la pregunta sobre si cada respuesta cambiaba o no, la mayoría de los estudiantes contestó que las respuestas

<sup>6</sup> Video 9-sep, 1ª fase-2ª exp, min 3:36

sí cambiaban, aunque en el comparativo de las preguntas 1 a 3, no fuera así, como se puede ver en las figuras anteriores. Tal vez contestan que sí cambiaron sus respuestas porque aunque se trata del mismo fenómeno los eventos no son iguales como lo refiere Daniel (ver Figura 5.6):

Segunda Experiencia

Modifica el experimento anterior. Ajusta las distancias de separación, se sugiere escoger un número entre 10 y 14cm. No olvides que las separaciones entre las campanitas sean iguales entre sí. Coloca un balón al comienzo del riel y suéltalo. Tapa tus ojos y escucha. Vuelve a contestar las preguntas 1 a 3. ¿Cambiaron las respuestas? Sí ¿Por qué? *porque la distancia no es la misma y por lo tanto no sene igual*

Tercera Experiencia

Ahora cambia la elevación del plano inclinado un poco. Coloca un balón al comienzo del riel y suéltalo. Tapa tus ojos y escucha. Vuelve a contestar las preguntas 1 a 3. ¿Cambiaron las respuestas? Sí ¿Por qué? *por la inclinacion del riel el volin fue mas rapido*

Figura 5.6 Daniel, pág. 2

En la conclusión de la primera fase se ha dado tiempo para una discusión en plenaria, en donde se pretende reflexionar en conjunto, profesor y estudiantes. A pesar de ello, en algunos casos aún existe persistencia en la idea de que lo que está cambiando es la distancia y no el tiempo, como se muestra en la Figura 5.7:

Todos juntos con su profesor discutan todas sus respuestas y lleguen a conclusiones sobre lo que observaron y escucharon sobre el fenómeno; escríbelas a continuación.

*Cuando los objetos con se reduce la distancia que se va a recorrer*

Figura 5.7 Fernando, pág. 2, discusión

Para otros la descripción que hacen del fenómeno es bastante clara, por ejemplo en la Figura 5.8:

Todos juntos con su profesor discutan todas sus respuestas y lleguen a conclusiones sobre lo que observaron y escucharon sobre el fenómeno; escríbelas a continuación.

*las conclusiones fueron que siempre las distancias son iguales pero depende de la inclinacion sera mas rapido o lento, pero siempre el tiempo con la que suenan las campanas es cada vez mas corto*

Figura 5.8 Daniel, pág. 2, discusión

### 5.3 Segunda Fase. Tiempo versus distancia

Con ayuda de la experimentación de la primera fase se reconoció al tiempo como variable mientras se controlaba la distancia recorrida, la intención de la segunda fase es relacionar el tiempo de caída por segundo (intervalos iguales) con la distancia recorrida correspondiente. Para ello se sugiere al estudiante que proponga una manera de marcar tiempos iguales con el ritmo de las campanas, lo que le implicaría mover las distancias bajo un cierto criterio, que ha sido discutido previamente en conjunto, como se muestra en la siguiente transcripción<sup>7</sup>:

- Claudia: -Se tiene que dividir un poco, bueno se tiene que expandir el espacio entre cada campana, para que se suene al mismo tiempo.
- Profesor: -Para que el ritmo . . .
- Claudia: -Sea igual que el otro . . .
- Profesor: -Sea constante. Muy bien aquí está la sugerencia de su compañera, ella dice que entonces lo que hay que hacer ahora es aumentar la distancia. Ahora yo les pregunto algo más, que creo que no viene allí . . . Voy a aumentar la distancia entre cada campana y ¿otra vez las voy a poner todas iguales?
- Estudiantes: -No . . .
- Profesor: -A ver . . . fuerte . . . (y le da la palabra a otra niña).
- Daniela: -Que hay que hacerla más grande, hacer más grande la distancia y más grande conforme vaya bajando.

En la Figura 5.9 se muestra la respuesta de un estudiante a las dos primeras preguntas de la segunda fase, que acabamos de referir:

**Segunda Fase. Tiempo versus Distancia**

**Instrucciones:** Trabajen en equipo y contesten las siguientes preguntas.

En el experimento anterior las distancias entre campana y campana eran iguales.

1. ¿Cómo eran los tiempos que tardó el balón en recorrer esas distancias?  
Cada vez mas cortos

2. ¿Qué podrías hacer para que el ritmo que marquen las campanas sea en tiempos iguales?  
Aumentar la distancia entre cada campana para proporcionar el tiempo con el balón

Figura 5.9 Adrián, pág. 5

<sup>7</sup> Video 9-sep, 2ª fase, min 2:41

La siguiente experiencia ha sido validada para guiar al estudiante con la intención de que realice un proceso de medición que permita observar el patrón de los números impares en las distancias recorridas por el balón al caer. Drake (1975) sugiere que Galileo lo pudo haber hecho de manera similar. La ventaja de este procedimiento es que evita los problemas de sincronización con varios cronómetros, pero la desventaja es que demanda del estudiante cierta habilidad para escuchar con mucha atención y medir el tiempo mentalmente, que es la forma como se mide el tiempo en la música. Por tal motivo los datos recuperados por los estudiantes fueron diversos, como se muestra en la Figura 5.10.

Debido a la cantidad de alumnos que forman el grupo fue necesario puntualizar algunas observaciones en el aula, para que todos pudieran confirmar la medición que se esperaba obtener. Por tanto, se repitió el experimento de forma demostrativa, en el salón de clases. En esta ocasión sólo se verificó que las campanadas del balón coincidieran con los sonidos que marca un metrónomo digital.

b) Coloca el balón al inicio del riel. Sigue el ritmo del metrónomo con el oído. Suelta el balón cuando escuches un golpe. Detén el balón al **tercer golpe**. Repite el proceso varias veces para verificar la posición (marca) del balón en el tiempo correspondiente.



¿Cuántas unidades de longitud recorrió? (recuerda que d es la unidad)

3 1/2 unidades      4 unidades

c) Coloca el balón al inicio del riel. Sigue el ritmo del metrónomo con el oído. Suelta el balón cuando escuches un golpe. Detén el balón al **cuarto golpe**. Repite el proceso varias veces para verificar la posición (marca) del balón en el tiempo correspondiente.

¿Cuántas unidades de longitud recorrió? (recuerda que d es la unidad)

8 unidades      9 unidades

d) Coloca una campana Azul en donde marcaste el segundo golpe, una campana Blanca en donde marcaste el tercer golpe y una campana Café donde marcaste el cuarto golpe. (recuerda que el primer golpe le corresponde al momento en que sueltas el balón).



e) Verifiquen que los golpes del metrónomo coinciden con los sonidos de las campanas. De no ser así modifica la elevación del plano, no más de 5 mm hacia arriba o hacia debajo de la elevación de 12.5 cm y verifica nuevamente con el metrónomo.

¿Podemos decir que hemos conseguido un ritmo constante? ¿Por qué?

Si, porque se usó el ritmo

6

Figura 5.10 Fernando, pág. 6

Para seguir con la secuencia de actividades que los alumnos tienen por escrito, el profesor les acompaña revisando la pregunta y las respuestas propuestas. La intención es llegar a un consenso en las distancias recorridas por el balón al caer por el plano inclinado. Cuando se ha logrado establecer que para una distancia del recorrido del balón llamada “d”, el metrónomo ha marcado 1s, para dos distancias 4s y para tres distancias 9s, en la secuencia se les pregunta cuál sería el tiempo correspondiente para una distancia adicional del recorrido y los estudiantes dan sus sugerencias como se muestra a continuación<sup>8</sup>:

- Jania: (Lectura en voz alta)  
-Supongamos que tenemos un riel más largo y repitiéramos el proceso anterior para más tiempos, ¿qué distancias serían las siguientes en recorrerse?
- Santiago: -yo.
- Profesor: -A ver, dime.
- Koinda: -Ocho.
- Profesor: -¿Por qué?
- Koinda: -Porque es al cuadrado.
- Santiago: -¡Ah! Yo te dije.
- Profesor: -O sea, ya ustedes están viendo una regularidad.
- Santiago: -¡Aja!
- Profesor: -y ¿qué es lo que están elevando al cuadrado?
- Santiago: -el cuatro veces, bueno.
- Profesor: -A ver, entonces, si eso es cierto, la primera es uno al cuadrado, uno . . .
- Koinda: -Dos, a, si es cierto.
- Profesor: -Dos al cuadrado es dos por dos. ¿Dos por dos?
- A coro: -Cuatro.
- Profesor: -¿Tres por tres?
- A coro: -Nueve.
- Profesor: -¿Cuatro por cuatro?
- A coro: -Dieciséis.
- Profesor: -¿De dónde salió el ocho?
- Marco: -Serían 14.
- Profesor: -¿Por qué?
- Marco: -Porque yo hice, haga de cuenta, hay es que es complicado, le sume.

---

<sup>8</sup> Video 11-sep, Parte1, min 16:06

- Profesor: -No, no debe ser complicado, ya lo estamos viendo ahí.
- Marco: -Este, a cuatro más cinco nueve, nueve más cinco catorce, yo digo que es eso.
- Profesor: -Si bueno, si esa fuera la regla que estuviera siguiendo este movimiento, podría ser, sin embargo con lo que dijeron tus compañeros, haber piensa lo que dijeron ellos, qué tanto coincide con lo que estamos contestando.
- Joaquín: -Pero yo pienso que lo que dice Marco no está bien porque si no sería la campana blanca seis, porque, uno más cinco seis y . . .
- Profesor: - Y entonces ya no funcionó la regla. Muy bien.
- Angélica: -O, va cambiando su aumento, puede que también que sea lo que le saque el cuadrado o que en la primera aumente cuatro y después de esas cuatro aumente cinco y después de cuatro puede que aumente seis o sí sea al cuadrado . . .
- Profesor: -Pero no se trata de adivinar, ¿no? Está bien, está bien, pero es que aquí lo estamos viendo, esa es la importancia del experimento, estamos viendo la regularidad, sus compañeros advierten, observan, que hay ya una regularidad, estoy viendo los tiempos en segundos, uno, dos, tres . . . y las distancias que se van recorriendo coinciden muy bien con el cuadrado . . .

Al final de la experiencia se debían anotar los resultados obtenidos y consensados, como se puede ver en la Figura 5.11.

Durante la primera y segunda fases de la experimentación se ha hecho un tratamiento de tipo verbal de los datos recogidos. Al finalizar la segunda fase se requiere que los estudiantes realicen un proceso de conversión que permita pasar del lenguaje natural a una expresión matemática que haga referencia a cómo cambia la distancia con respecto al tiempo al caer por un plano inclinado. Para ello se requiere utilizar símbolos y códigos que son propios del lenguaje algebraico, sobre todo porque se necesita una expresión matemática que, al igual que como lo hemos hecho con el lenguaje natural, generalice la situación observada en la caída de los cuerpos por un plano inclinado.

La segunda fase de la experimentación finaliza solicitando a los estudiantes que puntualicen las variables que cambian en el movimiento acelerado y caractericen el cambio, como se muestra en la Figura 5.12.

En el siguiente apartado se discuten los resultados de la aplicación de un repaso sobre la rapidez (propiamente la rapidez media) que se consideró necesario para poder seguir adelante con el estudio de la aceleración. Lo que a su vez permitiría hacer conversiones del lenguaje natural a registros de representación gráfica, geométrica y algebraica, que se consideraron primordiales para hacer los tratamientos correspondientes con el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Una vez determinadas las distancias contesten lo siguiente:

- ¿Cuánto mide la distancia a la campana Azul?  
18.5 cm de distancia
- ¿Cuánto mide la distancia a la campana Blanca?  
4 veces d
- ¿A qué distancia se encuentra la campana Café?  
9 veces d

Con estas ideas completa la siguiente tabla:

		Tiempo transcurrido
Distancia a la campana Azul	Una vez d	1 golpe o 1 segundo
Distancia a la campana Blanca	<u>4</u> veces d	2 segundos
Distancia a la campana Café	<u>9</u> veces d	3 segundos

Supongamos que tenemos un riel más largo y repitiéramos el proceso anterior para más tiempos.  
¿Qué distancias serían las siguientes en recorrerse?

		Tiempo transcurrido
Distancia a la campana siguiente (si la hubiera)	<u>16</u> veces d	4 segundos
Siguiente distancia	<u>25</u> veces d	5 segundos

Antes de continuar contesta lo siguiente:

¿Cómo seguirías en cada caso? (al menos tres números más)

{1, 2, 3, 4, 5, ...} continua: 6, 7, 8, 9...

{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...} continua: 13, 15, 17...

{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} continua: 14, 16, 18...

{1, 4, 9, 16, ...} continua: 25, 36, 49...

Esto quiere decir que para una unidad de tiempo le corresponde una unidad de distancia, para dos unidades de tiempo le corresponden cuatro unidades de distancia, para tres unidades de distancia le corresponde 9 veces  
cuatro unidades de distancia le corresponden el diecinueve  
cinco unidades de distancia le corresponden el veinticinco

¿En qué proporción aumenta la distancia con respecto al tiempo? Discutir en plenaria

aumenta la distancia respecto al tiempo al cuadrado

$$d = \alpha t^2$$

$$d = \alpha t^2$$

Figura 5.11 Claudia, pág. 7

Actividad 1

Observa las columnas de distancias recorridas por el balón y los tiempos que tardó en recorrer esas distancias de la tabla anterior, para contestar las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasa con el tiempo cuando la distancia aumenta?  
El tiempo no cambia
- ¿Qué sucede con la distancia cuando el tiempo aumenta al doble?  
aumenta al cuadrado
- ¿Qué sucede con la distancia cuando el tiempo aumenta al triple?  
aumenta al cuadrado
- ¿Qué sucede con la distancia cuando el tiempo aumenta al cuádruple?  
aumenta al cuadrado

Figura 5.12 Daniela, pág. 8

### 5.3.1 Repaso: Rapidez

Con el repaso de rapidez se pretende que los estudiantes contextualicen el estudio de rapidez constante a partir de la carrera de Usain Bolt del campeonato de Berlín 2009 ver Figura 5.13. En la Actividad 1 se utilizan los datos referentes a dicha carrera y se propone una conversión a una representación gráfica que requerirá de un tratamiento cada vez más refinado. Por tanto, los estudiantes deberán comenzar por identificar las variables implicadas en la carrera, o al menos aquellas en las que se requiere poner mayor atención en este caso.

Después de ver el video, reúnete con los miembros de tu equipo y contesten las siguientes preguntas:

1. ¿Qué se necesita para ganar la carrera?  
Ser veloz
2. ¿Qué distancia deben recorrer los atletas?  
100 m
3. ¿De acuerdo con la tabla de posiciones quién fue el mejor corredor?  
Usain Bolt
4. ¿Quién hizo un tiempo mayor, el que llegó en quinto lugar o el que llegó en séptimo?  
el séptimo
5. ¿Por qué?  
Porque tardó más en llegar a la línea de meta
6. ¿Cuál es la magnitud que nos permite identificar al ganador?  
El tiempo

¿Por qué?  
porque todos corren la misma distancia

Figura 5.13 Daniela, pág. 9

A partir de la Actividad 2, los ejercicios propuestos se acompañarán del uso de Geogebra y Excel, con la finalidad de que los estudiantes vayan reconociendo otros registros de representación y sus tratamientos correspondientes. Se comienza por proponerle al alumno que sólo con los datos iniciales y finales se convierta la carrera de Bolt en una representación geométrica que se transformará a su vez en una representación gráfica. Con lo anterior se espera que se realicen los tratamientos que se requieran en cada caso, para después reflexionar en qué tanto estas representaciones son válidas para modelizar la realidad. Cada actividad se acompaña con preguntas de reforzamiento sobre lo que se está estudiando (ver Figura 5.14).

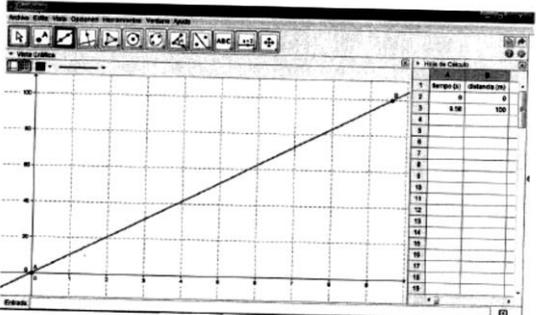
En la Actividad 2 también se hizo un ejercicio de interpolación, pero no fue posible usar el software planeado y se tuvo que trabajar con Excel de forma alternativa. Se interpolaron distancias en intervalos de 10 en 10 unidades para las que se debían estimar los tiempos correspondientes.

El mejor corredor, Usain Bolt, inició su carrera desde la marca de 0 metros y un tiempo registrado de 0 segundos, luego recorrió una distancia de 100 metros en 9.58 segundos.

Consideraremos estos datos como pares de coordenadas que permiten dibujar puntos en un plano cartesiano.

El tiempo suele anotarse en la columna izquierda que corresponde a las abscisas y la distancia en la columna derecha que corresponde a las ordenadas.

Dibújalos en Geogebra<sup>1</sup>: Une los puntos con una línea.



1. ¿Qué representa la línea que hemos trazado?  
*los metros por segundo que recorrió Usain Bolt*

Figura 5.14 Alfredo, pág 10

Las ventajas que ofrece el cualquier software de graficación es que se puede interactuar con sus elementos muy rápidamente, además de que no se requiere haber desarrollado previamente habilidades de trazado de gráficas y solamente aprovechar las herramientas que tiene el programa, ver Figura 5.15. Los estudiantes podían discutir sobre los valores estimados como en el siguiente diálogo<sup>9</sup>.

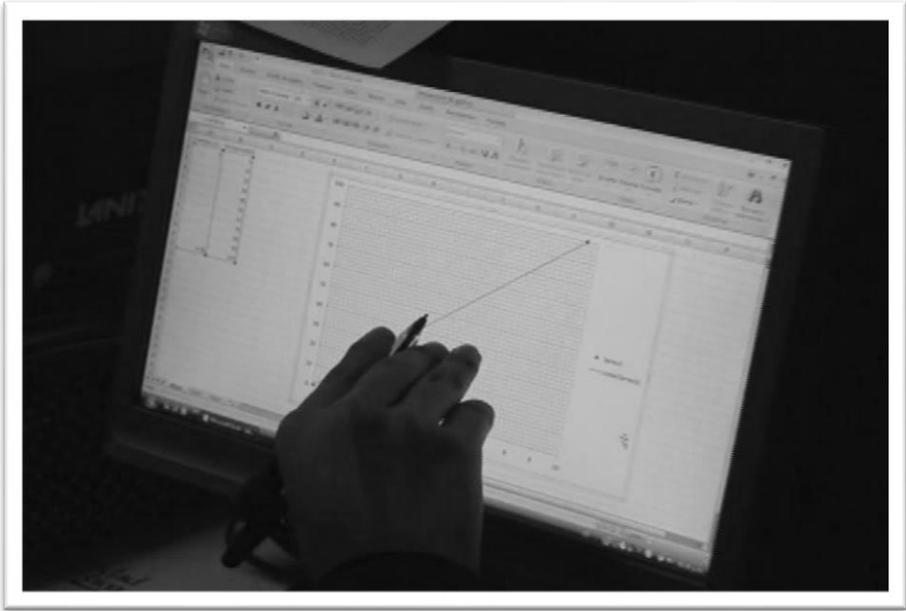


Figura 5.15 Fernando, aula de medios

<sup>9</sup> Video 17-sep, min 18:30

Francisco: - Cuando llegó a la distancia de los diez metros corre un segundo.

Suarez: -Pero es más de un segundo . . .

Francisco: -Ah bueno, es más de un segundo, es un segundo y algo pero no podemos saberlo.

Suarez: -¡Ah, ya!

Posteriormente en la Actividad 3, los estudiantes construyeron un gráfico de dispersión con los valores estimados a partir de la proporción propuesta (ver Figura 5.16).

3. Una manera de responder a la pregunta anterior es resolviendo la siguiente proporción.

$$\frac{100 \text{ metros}}{9.58 \text{ segundos}} = \frac{10 \text{ metros}}{\boxed{\phantom{0.958}} \text{ segundos}}$$

0.958

Figura 5.16 Adrián, pág. 12

Luego deben comparar los cocientes de cada intervalo y observar que aparece una proporción constante que los estudiantes deben asociar con la representación gráfica (ver Figura 5.17).

[ A ]

Fíjate que podemos considerar las siguientes razones. Complétalas con los resultados de la tabla.

$$\frac{20 \text{ metros}}{1.96 \text{ segundos}} = \frac{70 \text{ metros}}{6.706 \text{ segundos}} = \frac{90 \text{ metros}}{8.62 \text{ segundos}} = \frac{50 \text{ metros}}{4.76 \text{ segundos}}$$

Calcula los cocientes o resuelve las divisiones.

$$\underline{10.438} = \underline{10.438} = \underline{10.438} = \underline{10.438}$$

¿Qué observas?

Todos los cocientes son iguales  
Se mantiene la proporción

Figura 5.17 Daniela, pág. 14

Puesto que los datos tienen una tendencia lineal, el cociente entre los valores correspondientes para la distancia y el tiempo será constante. Entonces se aprovecha este hecho para proponer una conversión de los resultados obtenidos por la tabla de valores de la carrera en una expresión algebraica que representa una nueva magnitud física, la rapidez (ver Figura 5.18).

7. Calcula los cocientes correspondientes para cada pareja de valores de la tabla, excepto para (0, 0)

tiempo	distancia	cocientes
0.958	10	10.438
1.916	20	10.438
2.874	30	10.438
3.832	40	10.438
4.790	50	10.438
5.748	60	10.438
6.706	70	10.438
7.664	80	10.438
8.622	90	10.438
9.58	100	10.438

¿Qué observas?

Que los cocientes siempre son los mismos

La razón  $\frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$  es constante, en éste caso su valor es  $10.438 \frac{m}{s}$ , por eso la podemos escribir como:

$$v = \frac{d}{t} \text{ que se mide en } \frac{\text{metros (m)}}{\text{segundos (s)}}$$

Figura 5.18 Claudia, pág. 15

Una vez que se ha podido hacer un tratamiento gráfico del fenómeno idealizado de rapidez constante, analizar sus características y haber relacionado las variables con magnitudes físicas, se le puede dar un significado a la representación gráfica y hacer una interpretación física de la situación ideal presentada (ver Figura 5.19).

¿Qué representan los puntos en la gráfica?

La distancia y tiempo exacto

¿Qué representa la gráfica?

Es la representación de la rapidez de la carrera de Auto Bolt

Figura 5.19 Adrián, pág. 15, preguntas finales

Se plantea posteriormente la posibilidad de observar que los puntos de la gráfica no sólo tienen la misma tendencia lineal, sino que además los segmentos que los unen, incluso de forma alternada tienen la misma pendiente, que tiene el valor de la rapidez encontrada en el ejercicio anterior. Después de hacer el ejercicio mencionado en una hoja de Geogebra se le plantean preguntas a los estudiantes para que reafirmen la observación, ver Figura 5.20.

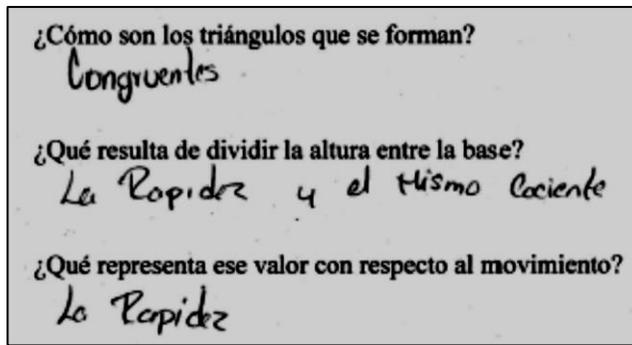


Figura 5.20 Paula, pág. 16

La Actividad 4 del repaso de rapidez fue de suma importancia, puesto que los estudiantes pusieron en juego sus habilidades de interpretación gráfica e interpretación deductiva en el sentido de Touma (2009). Por otra parte la actividad demanda la coordinación de varios registros, concretamente el del lenguaje natural, al momento de formular e interpretar las preguntas, el algebraico y aritmético al plantear una expresión que permita reconocer el valor de la rapidez para algunos casos. Además es necesario coordinar el registro geométrico y gráfico al hacer la interpretación deductiva de la representación de cada caso como el comportamiento de un movimiento.

Se identificaron algunos diálogos que muestran como unas estudiantes hacen una interpretación de las preguntas y le piden opinión al profesor sobre lo que han contestado<sup>10</sup>:

Paula: -Cinco entre diez salió 0.5, pero queríamos saber si esa era la proporcionalidad que aumenta de la primera, porque todas son diferentes, ¿no? Entonces queríamos saber si así estaba correcto como lo hicimos.

Profesor: -Sí. Primero pues por eso tienen el cuadernillo, para que puedan revisar. Primero ¿qué es lo que estamos comparando para saber la rapidez? Estamos hablando de rapidez, no hay otra cosa, para saber la rapidez, qué estoy comparando. ¿Qué cantidades?

Paula: -¡Pues!

Profesor: -Pues lo único que hemos estado haciendo este tiempo.

Paula: -El tiempo.

Profesor: -Sí, el tiempo y la distancia, pero en qué orden, es importante el orden, ¿qué va primero o qué comparo con respecto a qué?

Paula: -Primero va la distancia.

Profesor: -Comparo la distancia con respecto al tiempo. (Escribe en un pedazo de papel  $v = \frac{d}{t}$  y lo señala). Aquí ya identificaron, qué eje representa la distancia y qué eje representa al tiempo, entonces si ustedes hacen ese cociente pues sí van a

<sup>10</sup> Video 23-sep-3, min 00:00 hasta 04:20

obtener algo constante, si lo haces con uno, con cuatro, con ocho (refiriéndose a valores de la gráfica), con los valores que quieras, este resultado será constante.

Suarez: -Sí estamos bien

Las alumnas querían que el profesor les dijera la proporción en que aumentaba el tiempo para el primer caso de la primera pregunta, pero el profesor les hizo un recordatorio de cómo calcular la rapidez. Al no contestarles directamente, las estudiantes confirman que su forma de interpretar los gráficos de rapidez es correcta, pero no pueden dar la respuesta inmediata lo que las lleva a una breve discusión como se muestra a continuación:

Continuación del dialogo anterior<sup>11</sup>. . .

Paula: -¡Gracias!

Profesor: -¿Sí les quedó claro?

Paula: -¿Entonces ponemos inciso A) o gráfica A?

Suarez: -Inciso, es en la segunda.

Paula: - No, en la primera, ¿no?

Suarez: -No es en la segunda.

Paula: - No, en tiempo. ¿En dónde era?

Suarez: -No, si es el tiempo.

Paula: -Sí el tiempo, pero 0.5 segundos.

Suarez: -0.5 se refiere a la distancia.

Paula: -¡Aja!

Suarez: -Sí porque si fuera en el tiempo, el tiempo es más de 0.5 (mientras señala el eje correspondiente).

Paula: -Sí porque en un este, ¿cómo se llama?

En un segundo avanza 0.5 metros, ah, aja. . .

En este momento las alumnas sienten confianza nuevamente con su interpretación e identifican la respuesta que estaban buscando, pero siguen tratando de aplicar sus estrategias de prueba y error que pueden verse como un proceso de acomodación, pero que al no dar resultado se convierte en una anomalía para explicar lo que muestra la gráfica, por lo que tiene que ser rechazada, como se pude notar en las siguientes líneas:

Paula: -Entonces es la pregunta dos. Y, ¿en la B?

Suarez: -En la B se supone que . . . busca un punto que este exacto.

Paula: -¿Cómo que exacto?

Suarez: -O sea por ejemplo.

---

<sup>11</sup> Idem

Angélica: -El 30, ¿no?  
 Paula: -El primero.  
 Suarez: -Pero ese no nos va ayudar en nada porque está en ceros.  
 Paula: -¡Ah bueno! El segundo.  
 Suarez: -Ese sí.  
 Paula: - Por cada 10 segundos avanza 10 metros, ¿no?  
 Suarez: -Entonces dividimos 10 entre uno va dar a diez  
 Paula: -no, uno entre diez  
 Suarez: -0.1  
 Paula: -¿Entonces es esa?  
 Paula: -A ver, dijo que distancia sobre tiempo.  
 Suarez: -Sale 0.1 si es tiempo sobre distancia entonces no. Distancia sobre tiempo da 10  
 Paula: -Entonces es a 10. Y, ¿En la C?

La última opción que deben contestar referente a la primera pregunta se puede tomar como evidencia de un paradigma porque la alumna no acepta que un móvil pueda recorrer 55 metros en un segundo, tal vez porque se trata de algo que va ciertamente rápido y no lo ha contextualizado. Su diálogo es el siguiente:

Suarez: -Se supone que . . .  
 Angélica: -Un punto exacto es el que está entre el 50 y 60  
 Suarez: -Aja, entonces cada un segundo, da 55 metros, ¿no?  
 Paula: -En un segundo avanzó 55 metros . . .  
 Suarez: -Entonces se supone que 55 entre uno va dar 55 y no puede ser.

A pesar de que no se capturó en video la forma en cómo solucionaron el problema, contestaron correctamente y a continuación se presentan las respuestas que anotó Paula en la primera parte de la Actividad 4 de su cuadernillo, ver Figura 5.21.

Actividad 4

Observa los siguientes gráficos, en cada uno se representa un comportamiento distinto de un objeto en movimiento. Contesta las siguientes preguntas:

Parte I

1. ¿En qué proporción aumenta el tiempo en cada caso?  
R= A) 1 B) 1 C) 0.2
2. ¿En qué proporción aumenta la distancia en cada caso?  
R= A) 0.5 B) 10 C) 55
3. ¿Para qué caso es cierto que el objeto recorre distancias iguales en tiempos iguales?  
R= el B, el B y el C
4. ¿Cuál de los tres gráficos representa el movimiento más rápido?  
R= C
5. ¿Qué gráfico representa el movimiento de la carrera de Auto-Bolt?  
R= El B
6. ¿Qué gráfico representa la rapidez del movimiento de un tren bala de 55.55m/s?  
R= C
7. ¿Qué gráfico representa la rapidez del movimiento de una escalera eléctrica de 0.5 m/s?  
R= La A
8. Comparando la distancia recorrida con respecto al tiempo de A con B ¿qué móvil es más rápido?  
R= El B
9. ¿A qué tipo de movimiento hacen referencia los gráficos A, B y C?  
R= Rapidez Constante

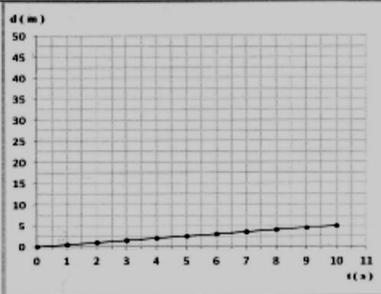


Gráfico A

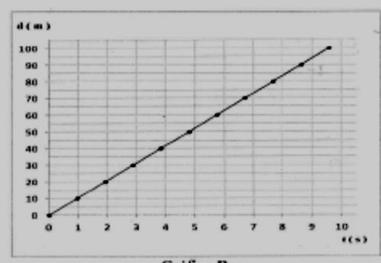


Gráfico B

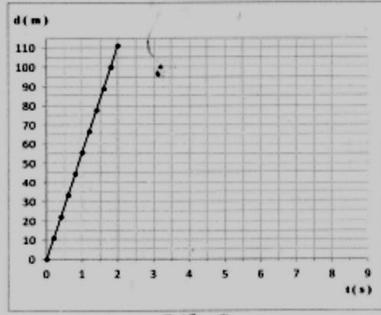


Gráfico C

18

Figura 5.21 Paula, pág. 18

Luego se considera importante resaltar algunas respuestas a la pregunta 9 de la actividad 4, porque es la primera ocasión que los estudiantes le dan nombre al movimiento conocido como movimiento rectilíneo uniforme que se está describiendo. Ver Figuras 5.22 a 5.25.

9. ¿A qué tipo de movimiento hacen referencia los gráficos A, B y C?  
R= A móviles  
A un movimiento de rapidez constante

Figura 5.22 Daniela, pág. 18, pregunta 9

9. ¿A qué tipo de movimiento hacen referencia los gráficos A, B y C?  
R= móviles  
A una constante de rapidez

Figura 5.23 Daniel, pág. 18, pregunta 9

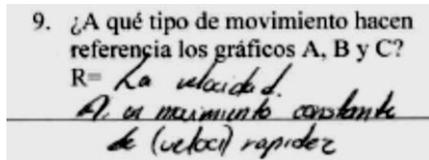


Figura 5.24 Claudia, pág. 18, pregunta 9

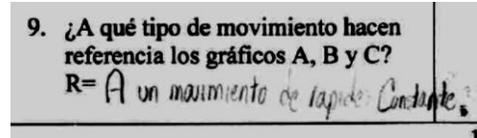


Figura 5.25 Ana Karen, pág. 18, pregunta 9

En la parte II de la Actividad 4, se plantearon casos límite, sobre los que el alumno debía reflexionar y hacer interpretación de los gráficos que estaba observando. A continuación se presentan los diálogos de un equipo de trabajo, que hacen referencia a la interpretación de los estudiantes al intentar contestar la primera pregunta de la sección<sup>12</sup>:

Fernando: -El gráfico E representa el movimiento de un tren tipo Metro ¿Cómo describirías su movimiento? . . . pues . . . va aumentando y luego hace una pausa.

Claudia: -Que cambia constantemente, ¿no?

Eduardo: -Que cambia constantemente.

Francisco: -Yo le hago caso a Claudia.

Fernando: -Bueno.

Fernando es consistente con la respuesta que ha dado en el pretest a un problema similar, que ya se ha discutido en el capítulo 4, Fernando ha escrito: *Se muestra el movimiento de un objeto en 3 etapas, en la primera el objeto aumento de 10 v(m/s) a 3v(m/s) en una cantidad de tiempo de 40s. En la segunda se mantuvo constante y finalmente en la tercera disminuyo a 0 en 10 segundos.* Ver Figura 5.26, :

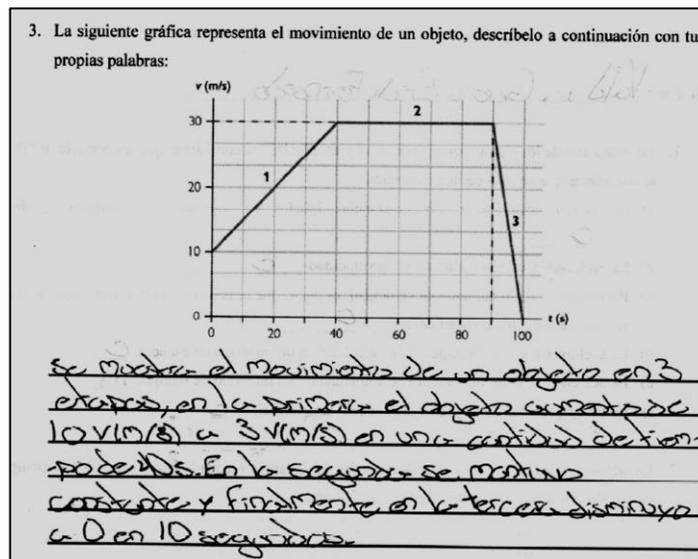


Figura 5.26 Fernando-Pretest

<sup>12</sup> Video 23-sep-3, min 05:19

Sin embargo, aún no cuenta con argumentos para defender su respuesta e incluso acepta el consenso del equipo y cambia su respuesta como se muestra en la Figura 5.27:

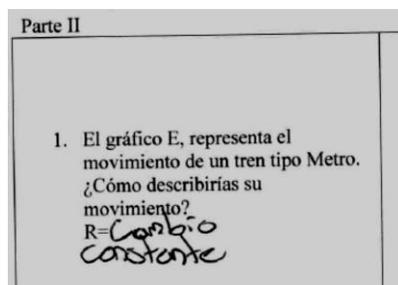


Figura 5.27 Fernando, pág. 19, pregunta 1

No se logró capturar la discusión que tuvo el mismo equipo para contestar la pregunta 2, pero para contestar la pregunta 3, se escucha lo siguiente<sup>13</sup>:

Estudiante: -Es igual.

Fernando: -No.

Francisco: -Constante.

Eduardo: -¡No!

(Se observa que Eduardo mueve la cabeza en señal de negación, le ofrecen una interpretación sus compañeros que no se escucha, pero el sigue negando con su cabeza).

Eduardo: -¡No!, nadie me entiende.

(Eduardo se lleva las manos a la cabeza)

Fernando: -O sea, que no cambia.

Francisco: -Entonces, ya es constante.

Fernando: -Nada más hemos respondido constante . . . las tres veces.

Luego para contestar la pregunta 4, los estudiantes del equipo discuten algo que no se escucha muy bien sobre lo que van a responder, a continuación se describen los diálogos que fueron más claros<sup>14</sup>:

Fernando -Que aumenta nada más.

Fernando: -Que va en aumento, Claudia.

(Eduardo hace una seña de un movimiento horizontal con su mano, aunque no se escucha lo que él explica o si está diciendo algo)

---

<sup>13</sup> Video 23-sep-3, min 06:32

<sup>14</sup> Video 23-sep-3, min 07:26

Fernando: -Bueno, ya no se compliquen la vida, sólo es muy rápido y ya  
(Eduardo señala sonriendo a Fernando)

Eduardo: -Exacto

Aunque todos sonríen entre sí, las respuestas del equipo a la pregunta 4 son diversas, como se muestra en las Figuras 5.28 a 5.31.

4. El gráfico F se refiere a un avión supersónico conocido como "Blackbird". Describe su movimiento  
R= va en aumento

Figura 5.28 Fernando, pág. 19, pregunta 4

4. El gráfico F se refiere a un avión supersónico conocido como "Blackbird". Describe su movimiento  
R= va en aumento en muy poco tiempo

Figura 5.29 Francisco, pág. 19, pregunta 4

4. El gráfico F se refiere a un avión supersónico conocido como "Blackbird". Describe su movimiento  
R= consecutivo ~~pendiente~~

Figura 5.30 Eduardo, pág. 19, pregunta 4

4. El gráfico F se refiere a un avión supersónico conocido como "Blackbird". Describe su movimiento  
R= Consecutivo o ascendente

Figura 5.31 Claudia, pág. 19, pregunta 4

Para la pregunta 5 hay discrepancias entre los miembros del equipo al grado que se divide en dos posiciones distintas, esta vez Fernando y Francisco no aceptan las propuestas de Claudia y Eduardo. Al parecer consideran tener mejores ejemplos de comparación, según los siguientes diálogos<sup>15</sup>:

Fernando: -La luz.

Francisco: -Puede ser un jet, un jet de caza

Francisco: -O el ese tipo que se lanzó desde la . . .

Fernando: -la estratosfera

Francisco: -¡Ese tipo está loco!

(No se escucha lo que dicen, mientras Claudia y Eduardo siguen discutiendo la respuesta anterior, después reanudan la discusión de la respuesta a la pregunta 5).

Claudia: -Un barco.

Fernando: -Entonces. . .

---

<sup>15</sup> Video 23-sep-3, min 08:35

Claudia: -Sería un barco.

Fernando: -¡Ah! ¿Un barco viaja más rápido que el supersónico? No lo creo.

Francisco: -A menos de que sea un torpedo.

Eduardo: -El sonido.

Fernando: -La luz.

Las discusiones de este equipo resultan interesantes porque ante el gráfico F, que representa un movimiento muy rápido, Fernando confirma tener una percepción adecuada del fenómeno, sin embargo no fue capaz de argumentar sus respuestas y cedió a la presión de sus compañeros. Eduardo busca la manera de argumentar, pero el conflicto que le genera la representación gráfica es tal que no puede expresar sus ideas en lenguaje natural. Claudia fue perdiendo seguridad y hacia el final de la actividad parece estar muy confundida, lo que se puede confirmar con su respuesta a la pregunta 5. Francisco no pretende comprometerse en un inicio, uniéndose a la mayoría, pero hacia la última pregunta parece que ha decidido que coincide más con las ideas de Fernando.

Se puede considerar que la escena que se ha descrito muestra el conflicto que se presenta cuando la teoría conceptual propia del estudiante no permite explicar eficientemente el fenómeno y las contradicciones que presenta esa teoría son tales que no se pueden seguir validando. En este caso la confusión de Claudia podría ser una muestra del inicio de un proceso de re-significación de su concepto de aceleración. En la Figura 5.32 se pueden observar todas las respuestas de Claudia a la parte II de la Actividad 4. En la pregunta 5 se puede apreciar dos respuestas distintas, separada por una coma anotó la respuesta que se consensó en grupo.

En las Figuras 5.33, 5.34, 5.35 y 5.36 se muestran las respuestas dadas por estudiantes de otros equipos de trabajo, en los que resalta un lenguaje más apropiado para sus explicaciones. En el caso de la respuesta a la pregunta 5 se puede observar que, como Claudia, han corregido su respuesta o simplemente no tenían una, ya que como se puede ver en el video, parece que de todo el grupo, sólo Fernando ha propuesto que algo tan rápido sólo puede ser la luz<sup>16</sup>.

Hasta la actividad 4 descrita anteriormente, los estudiantes han utilizado algunas representaciones de la aceleración y el movimiento rectilíneo uniforme, con la finalidad de que pudieran ir caracterizando ambos movimientos, al tiempo que ponen a prueba sus explicaciones, sus propias *teorías*.

Considerando que los alumnos han trabajado con situaciones didácticas que han motivado su reflexión sobre el tema de estudio, en la actividad 5 se propone hacer un ejercicio de interpretación inductiva en el sentido de Touma (2009) utilizando datos recopilados por la Federación de Atletismo. A partir de esta actividad se requerirá del alumno un refinamiento cada vez mayor en la formación, tratamiento, conversión y coordinación de las representaciones. Los estudiantes observarán los datos y darán sus interpretaciones, de acuerdo con una guía de observación.

---

<sup>16</sup> Idem

Parte II

- El gráfico E, representa el movimiento de un tren tipo Metro.  
¿Cómo describirías su movimiento?

R= *Se cambia constantemente*

- En una carrera de relevos 4 x 400m, se tomaron los tiempos hechos por cada equipo. El gráfico D representa el movimiento del tercer relevo. El cual recibió la estafeta al minuto 1.75 ¿Cómo describirías su movimiento?

R= *Constante*

- ¿Cuál es el valor de la rapidez del móvil que está representado en el gráfico D?

R= *Constante o pareja*

- El gráfico F se refiere a un avión supersónico conocido como "Blackbird". Describe su movimiento

R= *Constante o ascendente*

- ¿Qué otros objetos viajan a éstas velocidades o superiores?

R= *Un barco, la ka.*

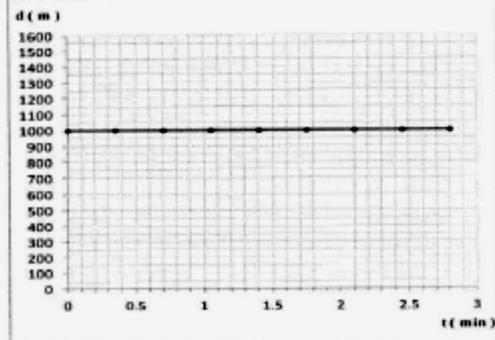


Gráfico D

3° relevo de una carrera de 4 x 400

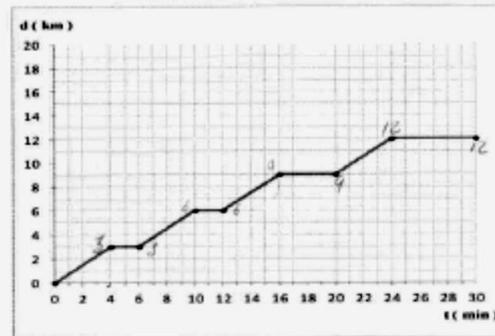


Gráfico E  
Metro

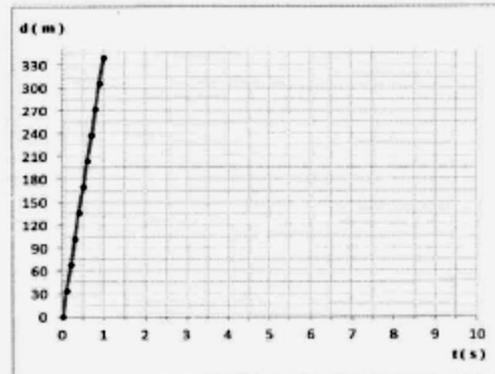


Gráfico F

Avión supersónico

Figura 5.32 Claudia, pág. 19

Parte II

1. El gráfico E, representa el movimiento de un tren tipo Metro. ¿Cómo describirías su movimiento?

R= Esto es Proporcional y va aumentando en diferentes Cantidades.

2. En una carrera de relevos 4 x 400m, se tomaron los tiempos hechos por cada equipo. El gráfico D representa el movimiento del tercer relevo. El cual recibió la estafeta al minuto 1.75 ¿Cómo describirías su movimiento?

R= No le Entregaron la Estafeta.

3. ¿Cuál es el valor de la rapidez del móvil que está representado en el gráfico D?

R= 0

4. El gráfico F se refiere a un avión supersónico conocido como "Blackbird". Describe su movimiento

R= Es mas Rapido

5. ¿Qué otros objetos viajan a éstas velocidades o superiores?

R= La Luz

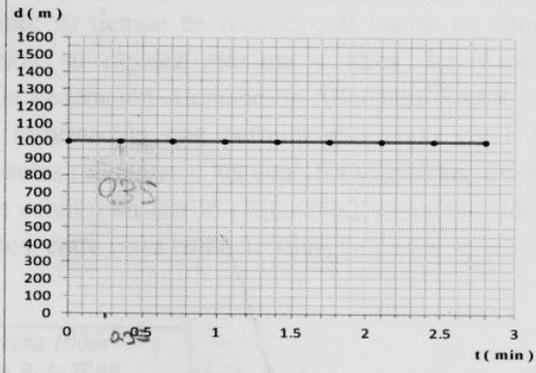


Gráfico D  
3º relevo de una carrera de 4 x 400

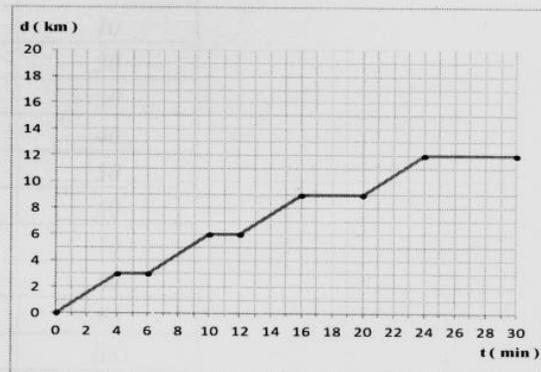


Gráfico E  
Metro

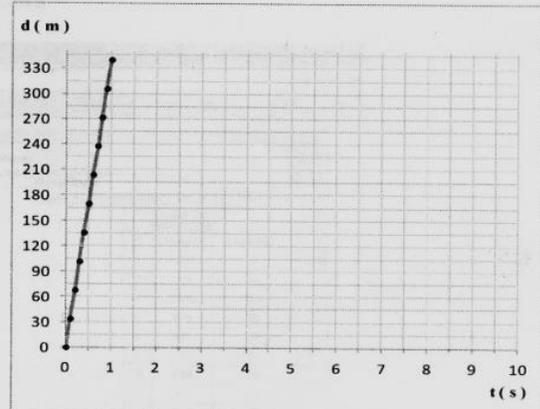


Gráfico F  
Avión supersónico

Figura 5.33 Paula, pág. 19

Parte II

1. El gráfico E, representa el movimiento de un tren tipo Metro. ¿Cómo describirías su movimiento?

R= se detiene en las paradas más largas

2. En una carrera de relevos 4 x 400m, se tomaron los tiempos hechos por cada equipo. El gráfico D representa el movimiento del tercer relevo. El cual recibió la estafeta al minuto 1.75 ¿Cómo describirías su movimiento?

R= no le entregaron la estafeta a tiempo

3. ¿Cuál es el valor de la rapidez del móvil que está representado en el gráfico D?

R= cero

4. El gráfico F se refiere a un avión supersónico conocido como "Blackbird". Describe su movimiento

R= que va muy rápido

5. ¿Qué otros objetos viajan a estas velocidades o superiores?

R= la luz

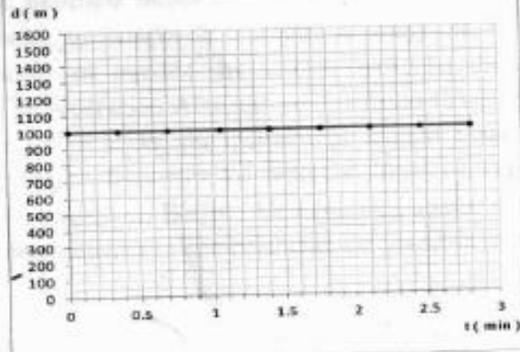


Gráfico D  
3° relevo de una carrera de 4 x 400

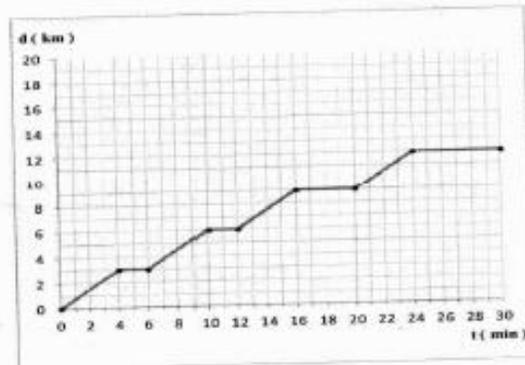


Gráfico E  
Metro

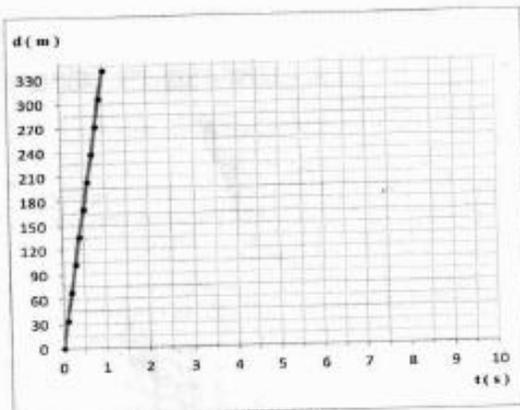


Gráfico F  
Avión supersónico

Figura 5.34 Guillermo, pág. 19

Parte II

1. El gráfico E, representa el movimiento de un tren tipo Metro. ¿Cómo describirías su movimiento?

R= No es constante

2. En una carrera de relevos 4 x 400m, se tomaron los tiempos hechos por cada equipo. El gráfico D representa el movimiento del tercer relevo. El cual recibió la estafeta al minuto 1.75 ¿Cómo describirías su movimiento?

R= No lo hay solo avanza el tiempo pero jamás se mueve

3. ¿Cuál es el valor de la rapidez del móvil que está representado en el gráfico D?

R= 0

4. El gráfico F se refiere a un avión supersónico conocido como "Blackbird". Describe su movimiento

R= la velocidad es constante

5. ¿Qué otros objetos viajan a éstas velocidades o superiores?

R= luz

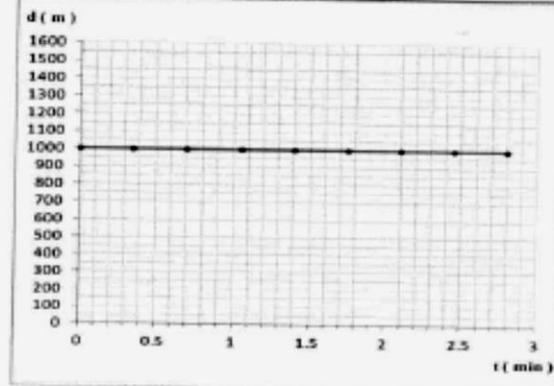


Gráfico D  
3° relevo de una carrera de 4 x 400

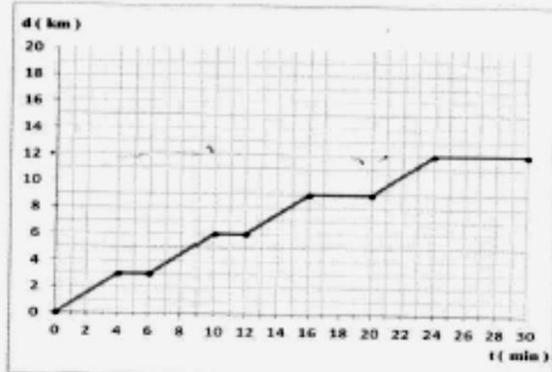


Gráfico E  
Metro

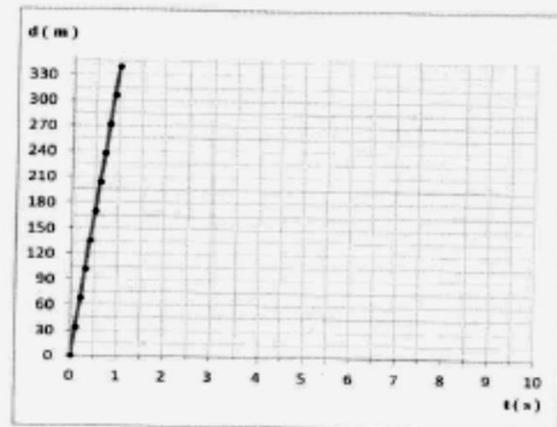


Gráfico F  
Avión supersónico

Figura 5.35 Daniela, pág. 19

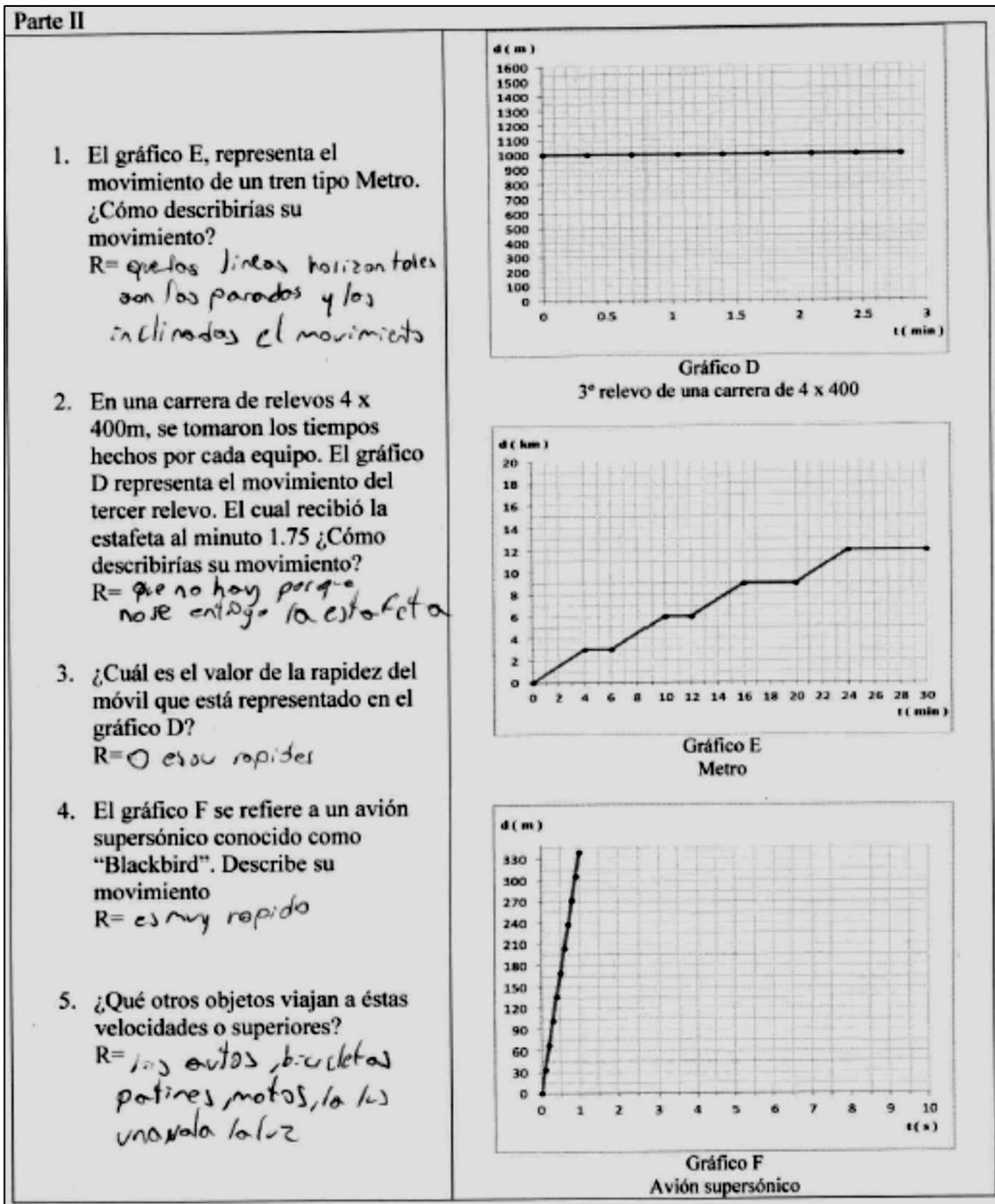


Figura 5.36 Daniel, pág. 19

A continuación se presenta el caso de Paula (ver Figura 5.37), quien en la pregunta uno puede observar que la tendencia de cada recta que dibujan los puntos conlleva el recorrido de una mayor distancia en un menor tiempo, aunque todavía la variable del tiempo no está explícita en su respuesta. Para la pregunta 2 Paula está haciendo un proceso de conversión de la representación sensorial de la velocidad a su representación geométrica, interpretando correctamente a la velocidad como ritmo y a la inclinación de una recta también como ritmo.

Coherentemente con su respuesta anterior, Paula advierte que la inclinación de la recta que pasa por los puntos que representan los datos experimentales refiere un movimiento más lento o más rápido, para finalmente hacer una interpretación inductiva de todo el movimiento que está representado por la tendencia de los datos.

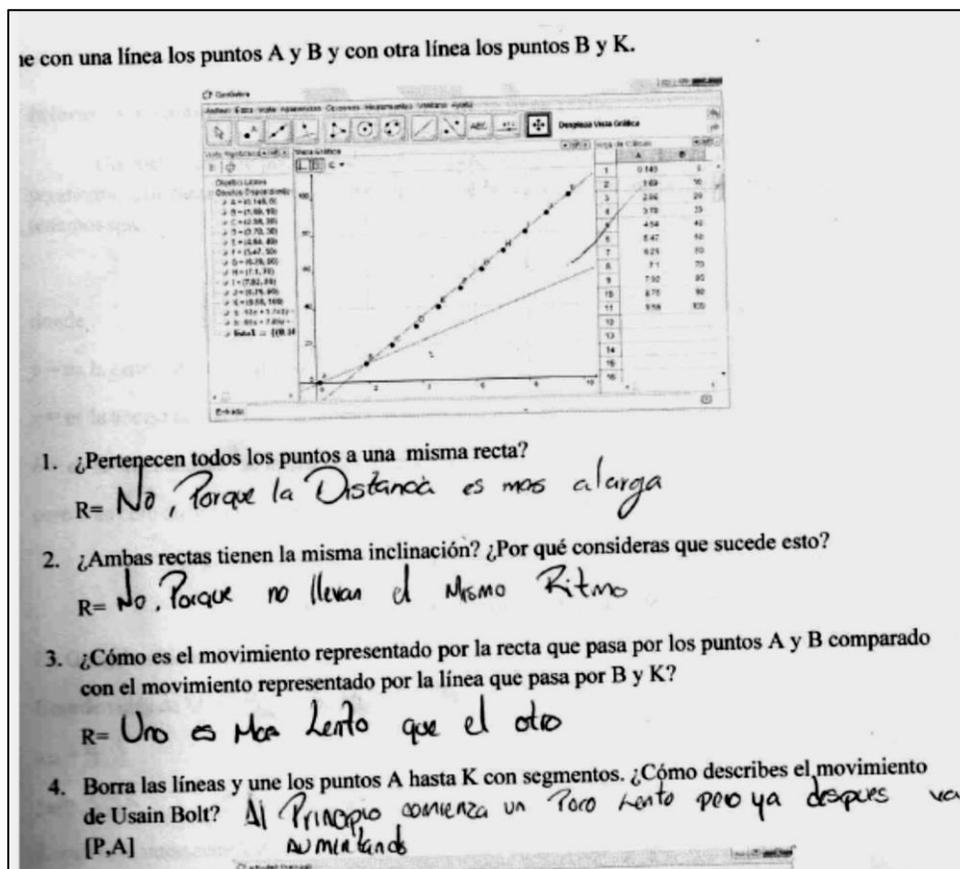


Figura 5.37 Paula, pág. 21

### 5.3.2 Rapidez Media

Luego de hacer un esbozo algebraico sobre la representación de la línea recta (ver Capítulo 3), se observan los datos sobre el plano cartesiano y se les pide a los estudiantes que los comparen con una línea recta. Esta es una práctica común en la experimentación científica, se observa el fenómeno, se obtienen datos y se busca una curva que sirva de modelo de comportamiento que se parezca al de los datos experimentales, lo que posteriormente, si es que los datos se ajustan mucho a la tendencia de la curva, se convertirá en un modelo matemático como lo refiere Touma (2009).

En la Figura 5.38 se muestra un ejemplo en el que Daniela, como todos los demás, traza la mejor línea de tendencia de los datos experimentales sobre su cuadernillo, hecha a su propio criterio. Debido a los problemas para calcular la pendiente de dicha recta, como son la calidad de la imagen, la graduación de los ejes, se hizo el mismo procedimiento en forma demostrativa, pero con ayuda de Geogebra, lo que permitió obtener un dato más preciso para la pendiente.

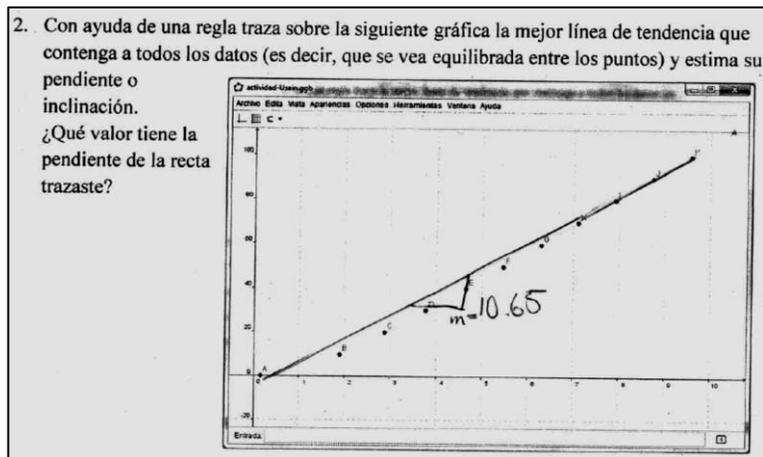


Figura 5.38 Daniela, pág. 23

Con ésta actividad se pudo relacionar la pendiente de la recta encontrada con la rapidez media del cuerpo en movimiento, en este caso el de Usain Bolt. Además se promovió la coordinación del registro gráfico, geométrico y algebraico, como se muestra en la Figura 5.39.

¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta?  
 $R = 10.6$

¿Cuál es el valor de la rapidez media?  
 $R = 10.6$

Identifica en la "Vista algebraica" la expresión matemática que representa a la línea encontrada.  
 ¿Cuál es?  
 $R = 10.4x - 4.4$

Figura 5.39 Daniela, pág. 24

Teniendo un valor para la rapidez media se compararon los datos obtenidos de manera experimental con los estimados por el ajuste a la curva encontrados por tanteo, con la finalidad de observar la validez del método. Luego se hacen algunas preguntas de reforzamiento, como se muestra en la Figura 5.40.

Traza líneas perpendiculares al eje que pasen por cada uno de los puntos desde A hasta K, localiza los puntos de intersección de estas con la línea de tendencia trazada anteriormente. Compara los puntos N a K obtenidos con los valores de la tabla.

Carrera 100m Usain Bolt-2009	
tiempo	distancia
0.146	0
1.89	10
2.88	20
3.78	30
4.64	40
5.47	50
6.29	60
7.1	70
7.92	80
8.75	90
9.58	100

Carrera 100m. Usain Bolt Aproximación gráfica	
tiempo	distancia
.15	0
1.90	10
2.90	20
3.80	30
4.70	40
5.50	50
6.30	60
7.1	70
7.90	80
8.80	90
9.64	100

¿Qué tanto se parecen?  
Se diferencian por Céntesimas

Lo que hemos hecho ha sido aproximarnos a los valores de la carrera de Usain Bolt, es una forma gráfica de encontrar la rapidez media.

4. Observa con cuidado la ventana del programa Geogebra.

¿Cuántas vistas tiene activas?

R= 3

¿De cuántas formas hemos representado el movimiento de la carrera de Usain Bolt?

R= 3

¿Cuáles son?

R= Algebraica, tabla de Valores y Plano Cartesiano

¿Qué identifica a la rapidez media en la expresión matemática de la vista algebraica?

R= La Pendiente

$$y = nx + b$$

25

Figura 5.40 Paula, pág. 25

Con la finalidad de que el estudiante observara distintas representaciones de la rapidez media se le hacen dos preguntas más al respecto, se enfatiza la definición de manera verbal y casi algebraica. Por último se compara el valor obtenido con el estimado en el Campeonato Mundial de Atletismo 2009. Debido a que en el video de la carrera el dato se da en km/h, se aprovecha la situación para proponer una alternativa de conversión de unidades y se vuelven a comparar los valores obtenidos para la rapidez media por distintos métodos (ver Figura 5.41).

¿Qué identifica a la rapidez media en la vista gráfica?  
 R= La Recta

¿Qué identifica a la rapidez media en la tabla de valores?  
 R= La proporcionalidad entre el tiempo y la distancia

La rapidez media es la misma en cualquier instante del recorrido en un movimiento rectilíneo uniforme. Cuando existen variaciones por pequeñas que sean en el comportamiento de un movimiento, la rapidez media es la medida de la tendencia central de los datos que describen el movimiento. En el caso que hemos estudiado, la mejor línea de tendencia es la mejor medida de la tendencia central de los datos. (Hacer alejamiento y acercamiento a la ventana gráfica de Geogebra como ejemplo).

5. Calculen la rapidez media de todo el recorrido sin considerar las pequeñas variaciones tendríamos que:

$$v_m = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = 10.438$$

Compara el valor de la rapidez media que estimaste con papel y lápiz con el valor que has determinado con Geogebra. ¿Qué tanto se diferencian? ¿Por qué?  
 R= Muy poco porque solo aumentan o disminuyen decimales

6. ¿Cuál es el valor de la rapidez media estimado en el Campeonato Mundial de atletismo 2009 que se puede observar en el video presentado en el repaso de rapidez (pág. 9)? Si es necesario vuélvelo a ver.  
 R= 37.6 kph

7. Conviértelo a m/s

$$37.6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \times \frac{100\text{m}}{1\text{km}} =$$

8. Compara los valores para la rapidez media que hemos obtenido. Discute con tus compañeros los resultados.

Valor estimado de la pendiente: 10.438  
 Valor calculado: 10.65  
 Valor estimado durante la carrera, según el video: 10.444

Figura 5.41 Daniela, pág. 26

Hasta el momento los estudiantes encontraron tres valores diferentes para aproximarse al valor de la rapidez media de Usain Bolt, por lo que era importante discutir en qué podía estar radicando la diferencia entre ellos, si todos podían considerarse válidos. Por lo que fue necesario que el profesor reflexionara con los alumnos, como se describe a continuación<sup>17</sup>:

<sup>17</sup> Video 3-oct-1, min 21:10

- Profesor: -¿A qué se deben las diferencias? . . . De todo lo que hemos obtenido, o sea, si está bien, son valores aproximados, pero son diferentes, todos los que hemos usado desde el 10.468, 10.444.
- Adrián: -Según Fanny a la velocidad.
- Profesor: -¿A la velocidad de quién?
- Alumna: -Porque varían los tiempos.
- Profesor: -Porque varían ¿los tiempos? No me queda claro, ¿qué quieres decir? . . . Bueno, entonces ¿a qué se deben las diferencias? A ver piensen un poco, eso es de lo que se trata, estamos viendo los valores, pero lo importante es que ... propongamos ideas, porque hay variaciones, porque no nos salió desde el principio 10.4444? ...
- Alumno: -Por los factores de la temperatura y eso . . .
- Profesor: -Bueno esos factores hicieron que la rapidez de Usain Bolt no fuera constante ¿no? Muy bien y por eso dio esa cantidad, sin embargo ... bueno ok, estos factores intervienen en que su velocidad no haya sido constante desde un inicio. Sin embargo, nosotros podemos estimar valores cercanos, a lo que obtuvieron en el campeonato. Haber hay va de otra manera la pregunta: ¿Por qué lo que obtuvieron en el campeonato como valor de la rapidez media, es lo correcto y no lo que nosotros estamos haciendo o al revés, o sea, ¿cómo sé cuál es lo que está bien?
- Evelyn: -Por las estimaciones
- Profesor: -Claro

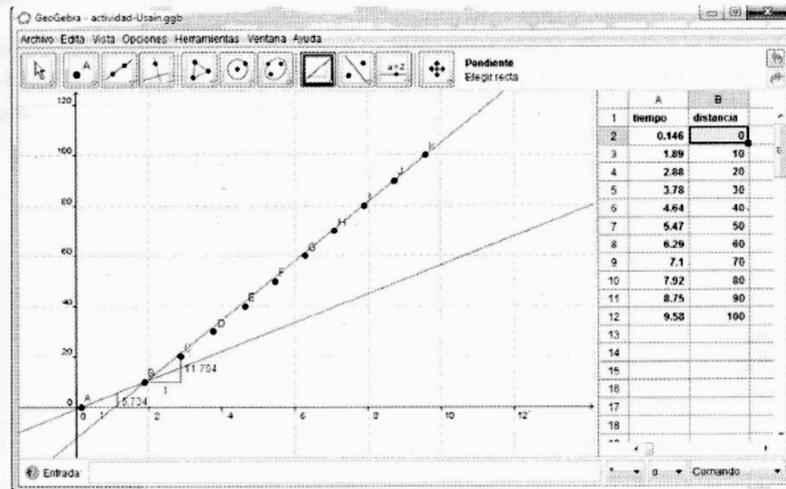
La respuesta hace referencia a la posibilidad de modelizar de distintos modos y con distintos procesos y representaciones válidas, un mismo fenómeno.

### 5.3.3 Media ponderada

Como un ejercicio adicional de tratamiento con las distintas representaciones utilizadas se calculó la media ponderada, tomando en cuenta los datos reales de la carrera de Usain Bolt y auxiliándose de Geogebra, como se muestra en la Figura 5.42. Alfredo cometió un error al considerar la proporción de distancia que se recorre a cierta velocidad, al dividir entre el tiempo total y no la distancia total, situación que se corrigió durante la intervención del profesor en una sesión posterior.

### Media Ponderada

Con ayuda del programa Geogebra traza dos líneas sobre el gráfico de Usain Bolt, una que pase por los puntos A y B y otra que pase por los puntos B y K. Muestra sus pendientes:



1. ¿Cuál es la rapidez media correspondiente de 0 a 10 metros utilizando los datos de la tabla?

$$v_{m10} = \frac{5.734 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{m}{s}$$

2. ¿Cuál es la rapidez media correspondiente de 10 a 100 metros?

$$v_{m90} = \frac{11.704 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{m}{s}$$

Entonces podemos decir que los primeros 10 metros Usain Bolt los recorrió a una  $v_m$  de 5.734 y de los 90 metros restantes los recorrió a una  $v_m$  de 11.704, que en suma establece la rapidez media para 100 metros como:

$$v_m = \frac{(10\text{m})(5.734 \text{ m/s}) + (90)(11.704 \text{ m/s})}{100 \text{ m}} = 11.107$$

(9.58s)

Figura 5.42 Alfredo, pág. 27

## 5.4 Tercera Fase. Modelización

Aunque el proceso de modelización matemática ya se había iniciado, como se ha referido en el apartado 5.3, se propuso a los estudiantes un procesamiento de la información, usando el software necesario para poder recuperar datos experimentales del video de una prueba de caída de un balón de acero sobre un riel de aluminio, como una representación de un movimiento acelerado. En las secciones anteriores se modelizó el movimiento rectilíneo uniforme, pero se considera que los estudiantes, después de haber realizado las actividades anteriores, se encuentran en condiciones de hacer la modelización de un movimiento rectilíneo acelerado.

Los datos fueron recuperados de una videograbación del evento, con ayuda del programa Avimeca 2.7, que permite recuperar distancias recorridas y tiempos transcurridos en la

grabación. Se copiaron los datos y se pasaron a Excel para poder realizar la gráfica de dispersión correspondiente (ver Figura 5.43) y que los estudiantes pudieran contestar las preguntas que fueron guiando la observación, como se observa en la Figura 5.44.

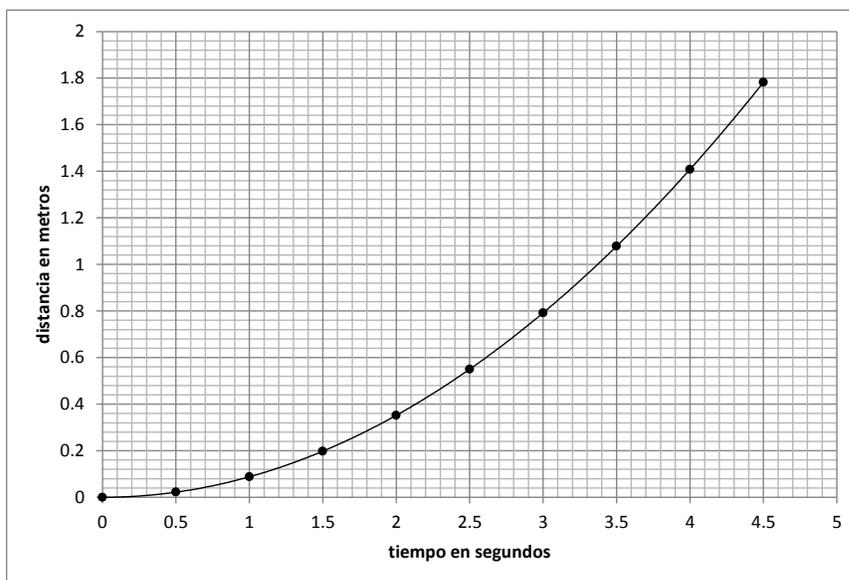


Figura 5.43 Gráfica realizada en el aula con Excel

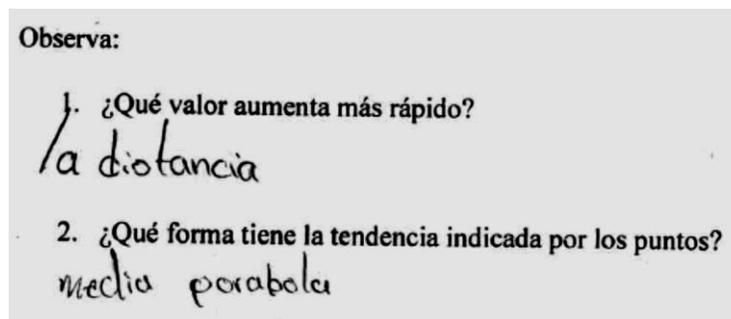


Figura 5.44 Daniela, pág. 29

Luego de agregar la línea de tendencia polinómica de grado dos a la tendencia de los datos se recuperó de Excel la ecuación de la parábola que mejor se ajustó a dicha tendencia y se anotó en el cuadernillo para posteriormente dibujarla en Geogebra.

Una vez hecho el ajuste se pidió a los estudiantes que compararan sobre el gráfico de Excel, la rapidez media y el movimiento acelerado (ver Figura 5.45), con la intención de que observaran la diferencia en los comportamientos, pero a su vez se aprovechó el dinamismo del software para plantear un método de aproximación de la rapidez media al movimiento acelerado, para obtener finalmente la rapidez instantánea (ver Figura 5.46).

Si buscamos la medida de tendencia central de los datos obtenidos por el experimento, o sea la rapidez media de todo el movimiento obtendríamos lo siguiente:

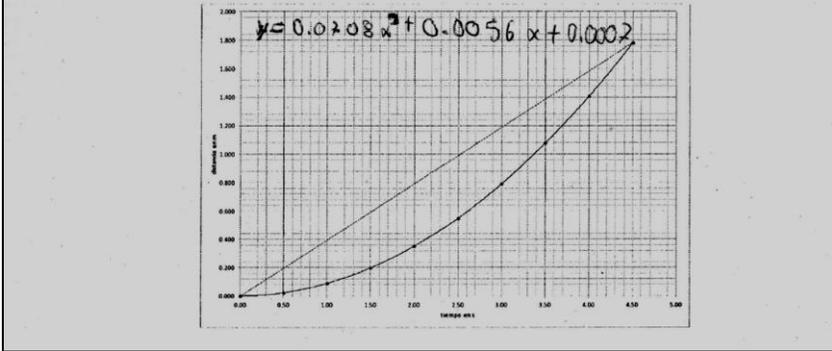


Figura 5.45 Alfredo, pág. 30

Repite el procedimiento para cada intervalo de un segundo:

Podrás observar que la rapidez media se aproxima cada vez más a la forma de la gráfica del movimiento acelerado.

Si seguimos aproximando indefinidamente la rapidez media se parecerá más a la rapidez del balón, justo en el instante del desplazamiento que se desea analizar.

Ocultar los segmentos y dibuja dos puntos separados que se encuentren sobre la parábola. Traza una recta que una a esos dos puntos.

¿Qué es lo que observas? *R= la rapidez es constante en una recta y la otra tiene variantes, la pendiente cambia.*

¿Cómo se le llama a la recta que corta a una curva en al menos dos puntos?  
*R= secante*

Desplaza uno de los puntos lentamente hasta que se encime uno en el otro.

¿Qué es lo que observas? *R= marca la rapidez en ese instante, la recta toca la curva en un punto.*

¿Cómo se le llama a la recta que toca a una curva en un punto?  
*R= Tangente*

Transcripción de las respuestas de Fernando:

¿Qué es lo que observas?

*R=La rapidez es constante en una recta y la otra tiene variantes, la pendiente cambia*

¿Cómo se le llama a la recta que corta a una curva en al menos dos puntos?

*R=Secante*

¿Qué es lo que observas?

*R=marca la rapidez en ese instante, la recta toca la curva en un punto*

¿Cómo se le llama a la recta que toca a una curva en un punto?

*R=Tangente*

Figura 5.46, Fernando, pág. 31

Finalmente se pide a los estudiantes que realicen una gráfica de rapidez instantánea contra tiempo, con la cual se les guio a los estudiantes para obtener las expresiones algebraicas que permiten calcular la aceleración, a partir de la gráfica de rapidez contra tiempo. Con ayuda de

la misma gráfica se guio a los estudiantes para obtener el área bajo la curva y relacionarla con la distancia.

## 5.5 Embodiment

El *embodiment* que se podría traducir como la personificación de una tarea, en el contexto de esta tesis se refiere a la noción de que el razonamiento humano y el comportamiento están definidos por nuestra experiencia física, social y la interacción con el mundo que nos rodea (Price, Roussos, Flcão y Sheridan, 2009).

Estudios de Lehrer y Schauble (2006, citados en Enyedy, Danish, Delacruz, y Kumar, 2011) han demostrado que pedir a los alumnos que produzcan y evalúen modelos del mundo real para ayudar a generar predicciones puede hacerles posible participar efectivamente en el proceso de producción del conocimiento científico y aprender el contenido que se está estudiando.

Tomando en cuenta las ideas de los dos párrafos anteriores se consideró que la personificación física permitiría a los estudiantes la coordinación de las representaciones estudiadas con el fenómeno de movimiento, por lo que se les solicitó a los estudiantes describieran 3 movimientos personificados por otros tres alumnos en el patio de la escuela. Se dividió al grupo en niñas y niños, con la única finalidad de obtener dos tipos de observaciones, una verbal, por parte de las niñas y otra gráfica, por parte de los niños. La práctica consistió en representar los siguientes movimientos<sup>18</sup>:

- a) Un peatón se desplaza en línea recta con una velocidad uniforme hasta la mitad del terreno, y luego trata de desacelerar progresivamente hasta el extremo del terreno.
- b) Un peatón se desplaza en línea recta con una velocidad uniformemente creciente hasta la mitad del terreno, y luego sigue con velocidad constante hasta el extremo del terreno.
- c) Un peatón se desplaza en línea recta con una velocidad uniformemente decreciente hasta la mitad del terreno, y luego sigue con velocidad uniformemente creciente hasta el extremo del terreno.
- d) Se hizo la grabación respectiva y de cada interpretación se obtuvieron las Gráficas que se muestran en las Figuras 5.48, 5.49 y 5.50

---

<sup>18</sup> Video-Embodiment

Pointages AviMéca	
t	x
s	m
0.00	0.16
0.20	0.93
0.77	1.87
1.27	2.88
1.87	3.89
2.37	4.82
3.00	5.95
3.47	6.84
4.00	7.85
4.53	8.83
5.13	9.88
5.67	10.80
6.27	11.80
6.83	12.60
7.30	13.50
7.90	14.30
8.50	15.40
9.10	16.20
9.60	16.90
10.23	17.70
10.83	18.50
11.47	19.30
12.00	20.00
12.67	20.80
13.30	21.70
13.97	22.20
14.43	22.80

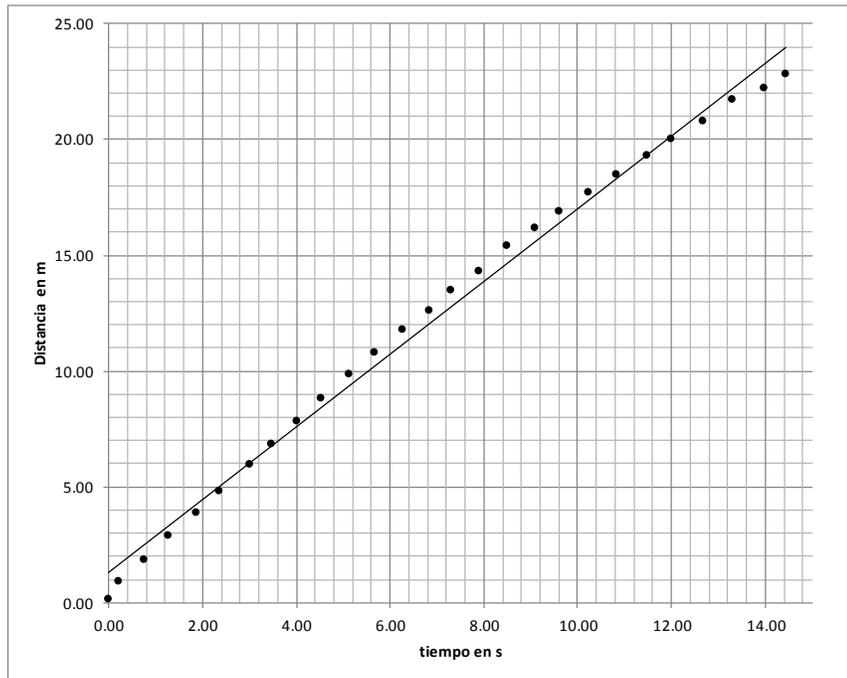


Figura 5.47 Gráfica 1, Adrián Lezama

Pointages AviMéca	
t	x
s	m
0.00	0.51
0.47	2.02
1.00	4.04
1.53	5.76
2.07	7.43
2.53	8.94
3.00	10.50
3.53	12.00
4.10	13.50
4.67	14.90
5.20	16.30
5.73	17.60
6.33	19.10
6.80	20.40
7.40	22.00
7.97	23.40
8.47	24.60

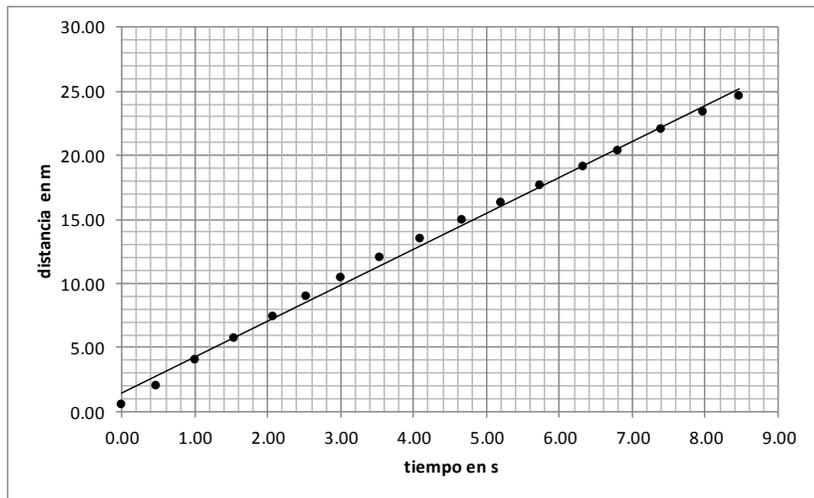


Figura 5.48 Gráfica 2, Ixman Saúl

Pointages AviMéca	
t	x
s	m
0.00	0.86
0.60	1.59
1.37	2.53
2.00	3.27
2.73	4.16
3.43	5.02
4.17	5.99
4.83	6.57
5.57	7.54
6.27	8.48
7.03	9.29
7.70	10.20
8.43	11.00
8.93	12.00
9.40	13.10
9.93	14.30
10.30	15.30
10.73	16.50
11.23	18.00
11.57	19.40
11.87	20.90
12.13	22.50
12.50	24.30

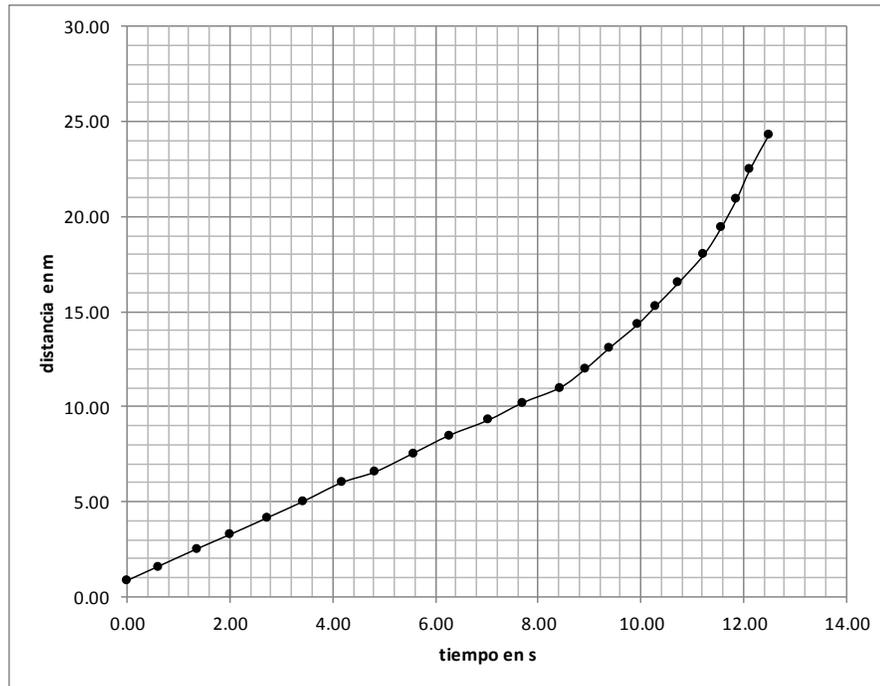


Figura 5.49 Gráfica 3, Diana

De las observaciones verbales, Diana advierte la diferencia entre ambos movimientos y los diferencia como constantes o inconstantes, lo que podríamos entender como constante o variado. Daniela mostró siempre una apreciación adecuada del fenómeno, sin embargo no expresa correctamente con palabras lo que sucedió en la primera mitad del recorrido de Diana (ver Figura 5.50).

Lezama: Camino constantemente una velocidad lenta (lontamente)  
 Ixman: Camino más rápidamente pero no corrió ni trote (media-rapidez) movimiento constante  
 Diana: Movimiento inconstante ~~lo~~ que fue ascendiendo de el más lento al medio y a correr.

Figura 5.50 Daniela, Interpretación-Embodiment

Koinda relaciona correctamente al ritmo con la velocidad de movimiento para el caso de Lezama, en este caso se puede estar refiriendo al ritmo al caminar o como comúnmente se dice al compás de la caminata de sus compañeros. En la descripción del movimiento de Ixman, observó un movimiento inicial acelerado, lo cual es cierto, si se observa minuciosamente la Grafica 2, hasta el tercer punto. A pesar de haber detallado el movimiento anterior tampoco advierte la tendencia en la primera mitad del movimiento de Diana, el cual es constante (ver Figura 5.51).

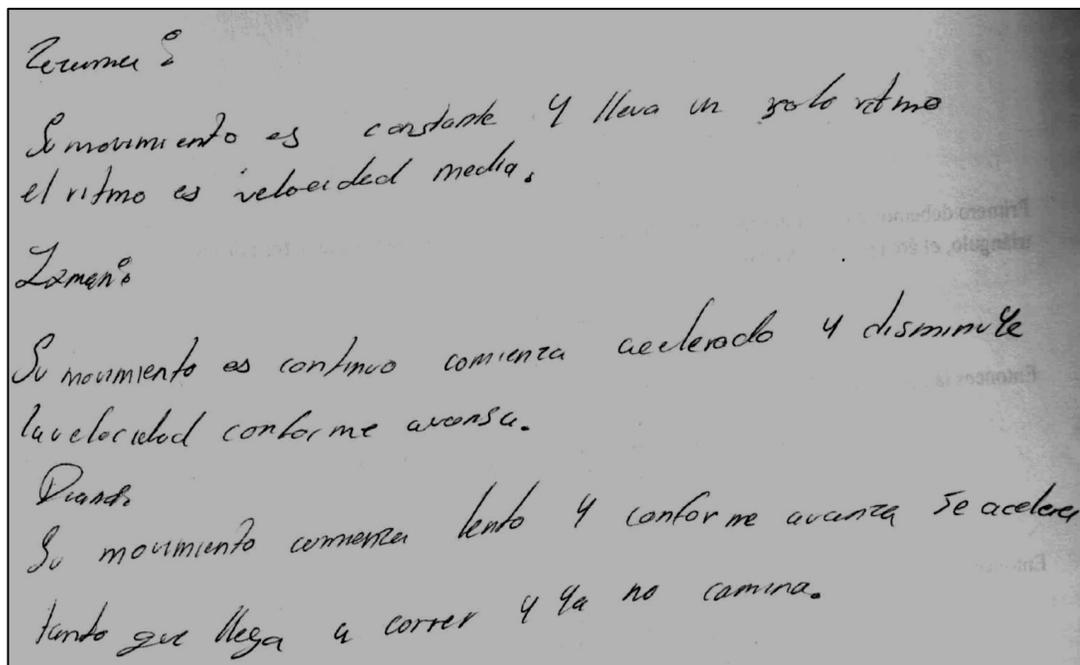


Figura 5.51 Koinda, Interpretación-Embodiment

En cuanto a las interpretaciones gráficas se puede notar que cuentan con más elementos del modelo matemático propuesto para describir el movimiento las de aquellos estudiantes que fueron más participativos, sin embargo, se puede observar una representación gráfica que describe el movimiento de forma muy general. Se puede suponer que los estudiantes están haciendo una interpretación inductiva, a partir de la observación directa de un movimiento al tiempo que pueden volver a usar el modelo para representar otro movimiento lo que permitiría suponer que también están haciendo una interpretación deductiva (ver Figuras 5.52, 5.53 y 5.54).

En el caso de Jonathan, observa el cambio del movimiento de Diana, pero invierte las variables de tiempo y distancia con respecto a la convención de graficar el tiempo en el eje de las abscisas. Pareciera que la representación de Alberto es similar a la de Jonathan. Para Guillermo el movimiento de Diana es solamente acelerado (ver Figura 5.52).

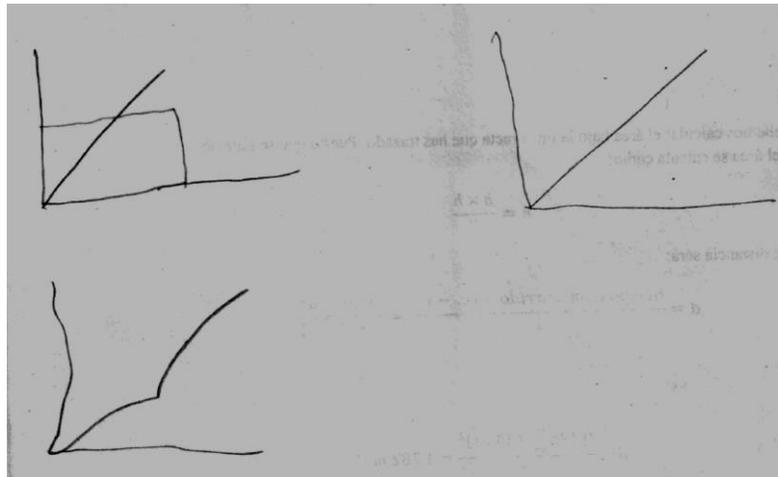


Figura 5.52 Jonathan, Interpretación-Embodiment

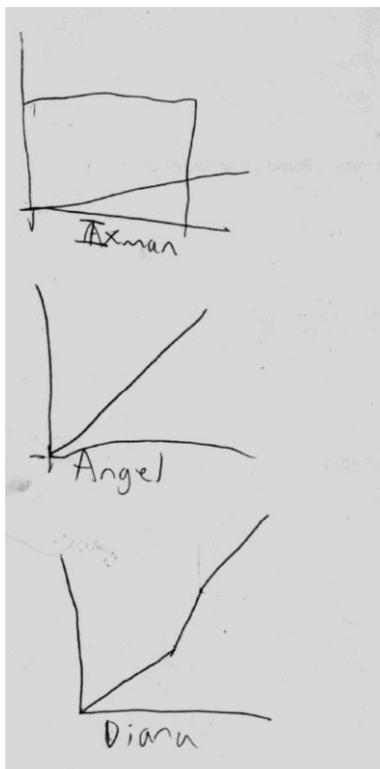


Figura 5.53 Alberto, Interpretación-Embodiment

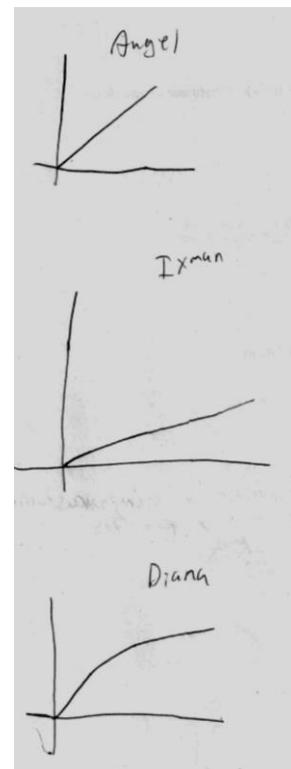


Figura 5.54 Guillermo, Interpretación-Embodiment

Eduardo parece haber observado en la caminata de Ángel un movimiento uniforme, pero después lo cambia y lo representa como un cuerpo en reposo (ver Figura 5.55).

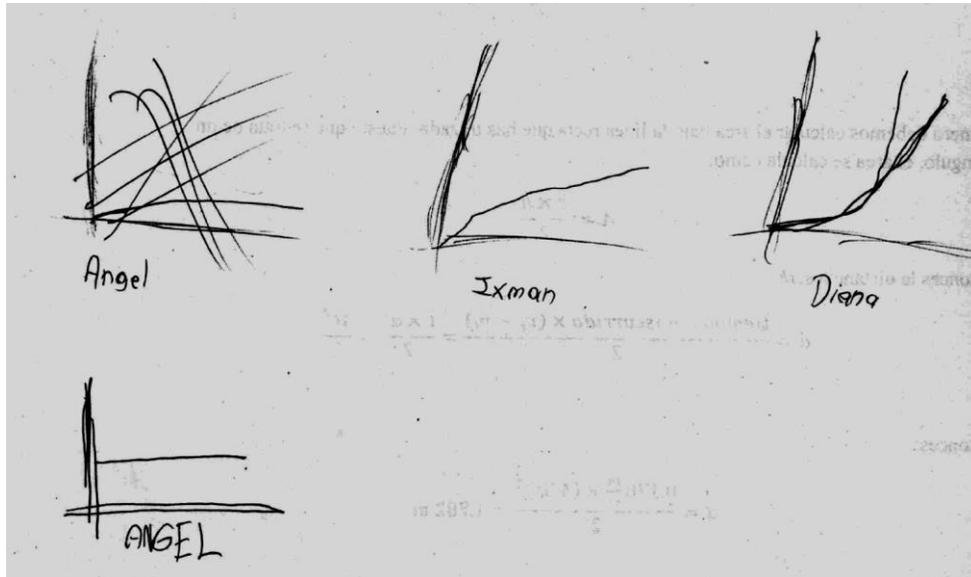


Figura 5.55 Eduardo, Interpretación-Embodiment

Aunque Alfredo no dibuja más elementos que los otros compañeros que se han descrito, la interpretación deductiva del fenómeno es correcta, aunque en la representación gráfica del movimiento de Diana no es detallado en su parte final (ver Figura 5.56).

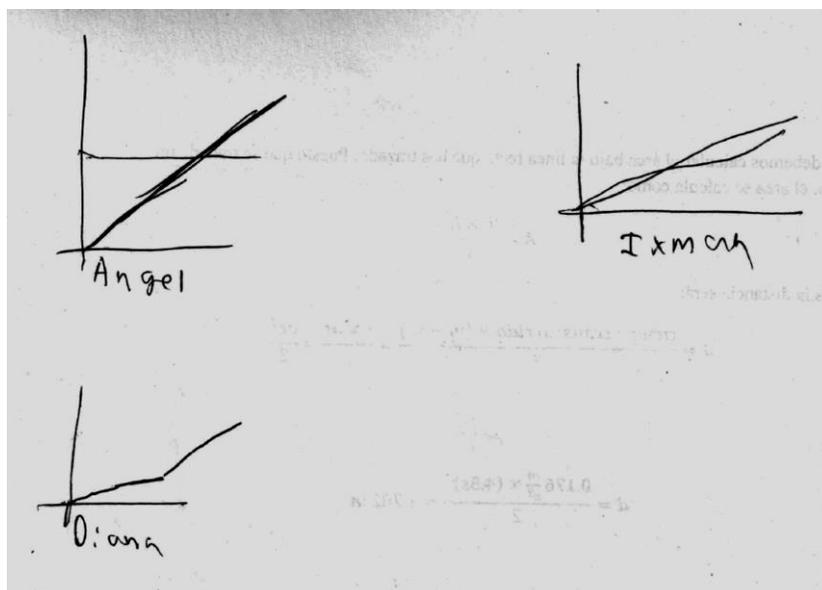


Figura 5.56 Alfredo, Interpretación-Embodiment

En el caso de Josué parece que ha identificado bien los ejes, pero en el movimiento de Adrián lo muestra como un cuerpo en reposo y en el de Diana no advierte la constancia de la primera mitad del movimiento (ver Figura 5.57).

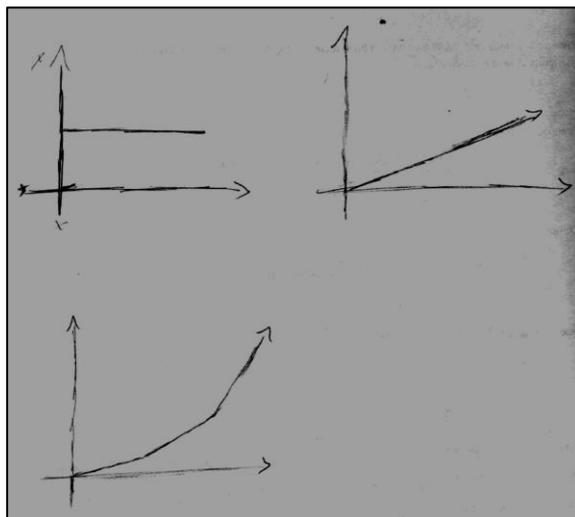


Figura 5.57 Josué, Interpretación-Embodiment

Fernando y Joaquín muestran más elementos del modelo matemático, incluso se atreven a proponer valores y de manera general representan bien el movimiento de sus tres compañeros actores, pero en el caso del movimiento de Diana sobre la primer parte de su movimiento tienden a minimizarla o no corresponde con los valores que ellos mismos proponen al momento de graficar (ver Figura 5.58 y 5.59).

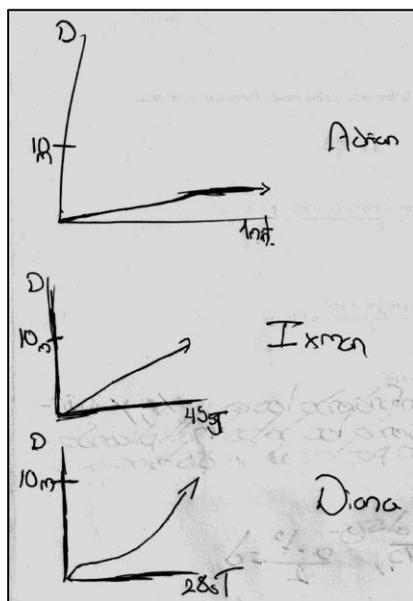


Figura 5.58 Fernando, Interpretación-Embodiment

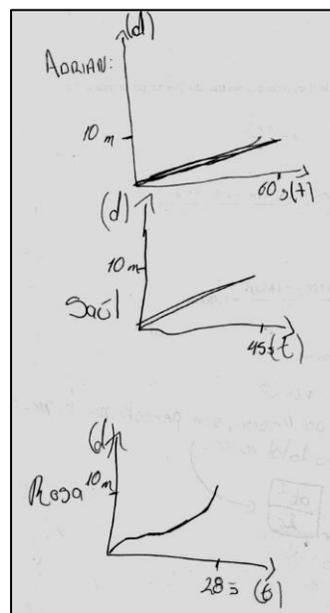


Figura 5.59 Joaquín, Interpretación-Embodiment

Daniel cuenta con más elementos que Josué para describir el movimiento, sin embargo ambas descripciones son muy similares (ver Figura 5.60).

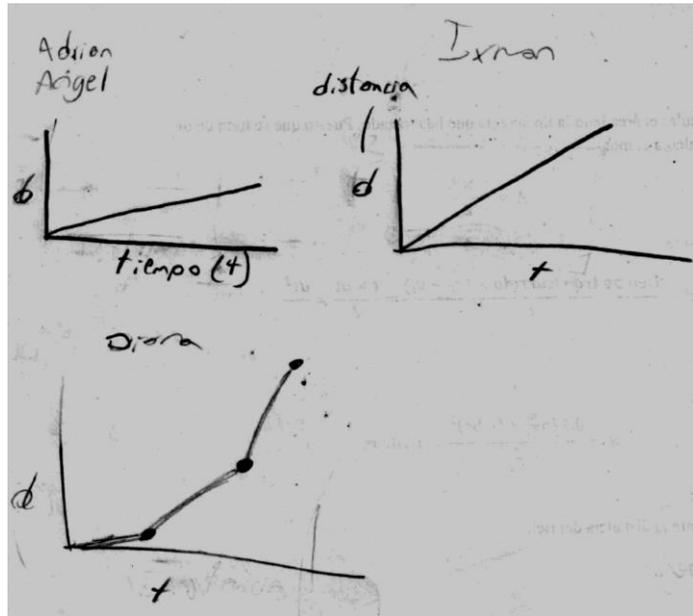


Figura 5.60 Daniel, Interpretación-Embodiment

Parece ser que la mejor representación es la que ha hecho Francisco. Ver Figura 5.61.

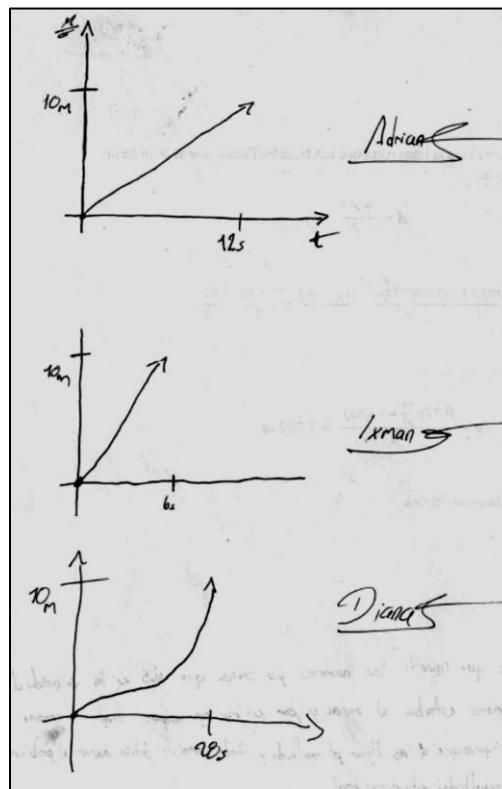


Figura 5.61 Francisco, Interpretación-Embodiment

Si se retoma la clasificación hecha en la tabla 5.1 sobre los criterios utilizados para clasificar el nivel de percepción de los alumnos, comparándola con los resultados obtenidos en el postest y la actividad del embodiment, podemos decir que Paula mantuvo una percepción adecuada del fenómeno, sin embargo no alcanzó a dominar el tratamiento algebraico, Adrián mantuvo la percepción adecuada del fenómeno sin mostrar algún problema para el tratamiento algebraico, pero su representación gráfica del movimiento que personificaron sus compañeros aún muestra algunas imprecisiones (ver Figura 5.57). En el caso de Daniela parecía haber alguna confusión para reconocer el tiempo como variable y no reconocía a la aceleración como un cambio en la velocidad en un intervalo de tiempo, pero después de la aplicación de la secuencia didáctica su nivel de percepción del fenómeno fue adecuado aunque tiene algunas inconsistencias al expresar el movimiento de sus compañeros en lenguaje natural (ver Figura 5.50). En general Paula, Alfredo, Koinda, Francisco Joaquín, Fernando y Eduardo mejoran su percepción al reconocer las representaciones gráficas del movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado y lo confirman con sus modelaciones del embodiment; en el caso específico de Francisco, sus representaciones gráficas son muy similares a las modelaciones presentadas en las Figuras 5.47 a 5.49 (ver Figura 5.61). Alberto, Josué, Guillermo, Jonathan, Daniel y Claudia se quedan al nivel de reconocer sólo el movimiento rectilíneo uniforme y su representación gráfica.

# Capítulo 6

## Conclusiones

El diseño de la experimentación educativa que se expone en esta tesis permite reflexionar en seis aspectos esenciales que lo integran: los resultados de la aplicación del pretest, resultados de la aplicación del postest, resultados de la aplicación de la secuencia didáctica, resultados de la evaluación con el *embodiment*, el modelo de enseñanza propuesto y algunas respuestas a las preguntas de investigación.

### 6.1 Reflexiones sobre la aplicación del pretest

Para poder clasificar las ideas previas de los alumnos se diseñó un pretest que permitió reconocer lo siguiente:

- ~ Un poco más de la mitad de los estudiantes encuestados tenían aparentemente una percepción adecuada del fenómeno sin dejar de persistir problemas relativos a la identificación de variables relacionadas con el fenómeno de aceleración ligados a las ideas previas de los alumnos.
- ~ Aparentemente pocos alumnos mostraron una falta de coordinación entre los registros de lenguaje natural, el gráfico y el numérico.
- ~ Los estudiantes que coordinaban varios registros de representación pudieron dar explicaciones más adecuadas del fenómeno.

### 6.2 Reflexiones sobre la aplicación del postest

Con la intención de evaluar el desempeño de los estudiantes al enfrentar cuestionamientos como los que se hacen en las pruebas de selección para ingreso a un nivel medio superior se aplicó un pretest con preguntas tipo del que resalta:

- ~ Más de tres cuartas partes del grupo de estudiantes pudieron identificar una expresión escrita en lenguaje natural con la modelización adecuada de un movimiento rectilíneo uniforme.

- ~ Más de la mitad de los alumnos relaciona correctamente el nombre de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con su modelización correspondiente.
- ~ Responder problemas relacionados con la formación de una representación mental que luego debe ser interpretada en lenguaje natural, convertirla en lenguaje algebraico y finalmente darles un tratamiento numérico, son las situaciones más difíciles que los estudiantes pueden enfrentar. Se observa la necesidad de coordinar varios registros de representación que requieren de mayor refinamiento en el tratamiento de cada registro.

### **6.3 Reflexiones sobre la aplicación de la propuesta didáctica**

La aplicación de la secuencia de actividades didácticas se diseñó con la finalidad de propiciar una interacción de los estudiantes con el fenómeno, de los estudiantes con el profesor y entre ellos mismos.

De la primera fase se puede concluir:

- ~ El experimento de caída permite a los estudiantes relacionar el ritmo con la velocidad. Es decir, proporciona una representación cercana a cualquier persona sobre el concepto de velocidad que es totalmente sensorial.
- ~ Las representaciones propuestas y la discusión, permitieron a los alumnos mejorar sus descripciones en el lenguaje natural.
- ~ Uno de los retos más grandes se observa en el proceso cognitivo de conversión de un registro en lenguaje natural a un registro algebraico.

De la segunda fase:

- ~ La utilización del software de hoja de cálculo facilita a los estudiantes el tratamiento gráfico.
- ~ La interacción con los objetos físicos, en este caso la caída del balón por el plano inclinado, facilita coordinación de varios registros de representación.
- ~ Se cuestionó al menos un paradigma. Característica importante del modelo de enseñanza.
- ~ Se propició el conflicto cognitivo en al menos un equipo de trabajo.

Tercera fase:

- ~ El trabajo con el experimento del plano inclinado como se describe en esta tesis, proporcionó a los estudiantes una representación clave para interpretación deductiva en el sentido de Touma (2009). La relación entre estas representaciones

es una muestra de la presencia de la paradoja cognitiva del pensamiento matemático, el hecho de que no hay semiósis sin noesis.

- ~ Los estudiantes identificaron que la modelización de un fenómeno es una aproximación al comportamiento real que depende de los procesos de estimación.

#### **6.4 Reflexiones sobre la evaluación usando el embodiment**

El embodiment se propuso como una forma alternativa de evaluar la interpretación deductiva del fenómeno de aceleración:

- ~ La personificación del movimiento o embodiment permite observar un proceso de interpretación deductiva que describe satisfactoriamente el fenómeno físico.
- ~ El embodiment mostró que las representaciones motivan la coordinación entre los registros de representación y pueden llevar a una interpretación deductiva correcta de un fenómeno físico.

#### **6.5 Reflexiones sobre el modelo de enseñanza propuesto**

El modelo de enseñanza propuesto está basado en la teoría del cambio conceptual para la enseñanza de las ciencias que a su vez tiene fundamento en las teorías constructivistas. Al reflexionar sobre su aplicación en la experimentación didáctica que se ha descrito en esta tesis se concluye que:

- ~ El modelo se aplicó en el diseño de las actividades didácticas y en el trabajo en el aula, sin embargo la extensión de la secuencia, el uso de los recursos tecnológicos y la complejidad de los tratamientos algebraicos provocaron una forma de trabajo más dirigida hacia el final de las actividades propuestas.
- ~ Calcular el área bajo la curva de una gráfica de movimiento uniformemente rectilíneo ya sea acelerado o no, usando el mismo modelo de enseñanza de cambio conceptual, plantea un reto para el autor de esta tesis que podría ser estudiado en futuras investigaciones.
- ~ La secuencia didáctica que se propuso en esta tesis fue extensa, sobre todo por la insistencia de proponer situaciones que generarán observación, interacción directa con el fenómeno de estudio y reflexiones personales.
- ~ El autor de esta tesis considera que la propuesta curricular de los programas de estudios actuales ocasionan que las lecciones que se ofrecen en los libros de texto queden saturadas de contenidos que se deben cubrir en corto tiempo, por lo que el espacio que queda para la observación, experimentación y reflexión sobre los contenidos que se plantean es mínimo.

- ~ Los libros de texto tienen que cumplir con compromisos editoriales que obligan a dar por hecho que los tratamientos que ofrecen deben ser suficientes para entender los conceptos.

## 6.6 Algunas respuestas a las preguntas de investigación

Se han planteado dos preguntas de investigación a las que se dará respuesta a continuación:

1. ¿El uso de distintas representaciones puede generar suficientes contradicciones a las ideas incorrectas adquiridas a través del sentido común sobre el concepto de aceleración y motivar la construcción de un pensamiento formal?

- ~ Las explicaciones que tratan de estructurar algunos alumnos para describir oralmente la caída del balón por el plano inclinado muestra que las ideas previas que tenían sobre el concepto de aceleración no eran del todo claras.
- ~ Aunque es muy difícil cuantificar en qué medida se ha generado conflicto en la ciencia de los alumnos, las discusiones y desacuerdos motivados por la Actividad 4 del repaso de rapidez, se consideran como una evidencia de que algunos estudiantes pusieron a prueba las ideas que tenían sobre el movimiento rectilíneo uniforme.
- ~ Por los resultados obtenidos en los análisis a posteriori del pretest, postest y secuencia didáctica, se puede observar que los estudiantes que muestran una coordinación de varios registros de representación pueden hacer argumentaciones más elaboradas y más claras sobre la descripción del movimiento acelerado.
- ~ La descripción verbal que hacen algunos estudiantes de cómo cambia la velocidad en un movimiento acelerado, relacionándola con el ritmo es una muestra de coordinación entre distintos registros de representación que tiene repercusión hasta su interpretación deductiva del fenómeno.
- ~ En el embodiment, los estudiantes aplican varios registros de representación, dando explicaciones más claras, asociando correctamente los modelos matemáticos usados para describir el movimiento uniforme.
- ~ La modelización elaborada por los estudiantes en el embodiment, muestra su capacidad de interpretación deductiva.
- ~ De los 15 estudiantes seleccionados para darles seguimiento con ayuda de los cuadernillos y las videograbaciones 7 estudiantes mejoraron su nivel de percepción del fenómeno de aceleración.
- ~ De los 7 estudiantes que mejoraron su nivel de percepción 3 hicieron interpretación deductiva del embodiment al modelarlo correctamente.

2. ¿Cuál es el papel de las representaciones en la formación del concepto de aceleración?

- ~ Las representaciones le permiten al estudiante generar imágenes en la mente sobre un objeto observado.
- ~ Las representaciones semióticas proporcionan códigos y símbolos que dependiendo del registro de que se trate depende la complejidad de su tratamiento.
- ~ Las representaciones propuestas se prepararon de modo que los alumnos fueran capaces de refinar sus tratamientos gradualmente.
- ~ En todas las representaciones propuestas se podían igualar sus unidades significativas, es decir se podían ir coordinando los distintos registros de representación, pero en la ciencias experimentales es necesario además ser capaz de relacionar las propiedades, características de los objetos fenomenológicos y las condiciones experimentales, lo que Touma denomina interpretación deductiva que se podría considerar el proceso cognitivo más formal del pensamiento científico.
- ~ En la enseñanza de las matemáticas usualmente se considera necesario ejercitar los tratamientos de un solo registro de representación, comúnmente el numérico, sin embargo es aún más necesario ejercitar la coordinación de varios registros de representación semiótica, en la que estén implicados los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión.
- ~ En la enseñanza de las ciencias además de ejercitar la coordinación entre distintos registros de representación semiótica es necesario ejercitar los procesos de interpretación inductiva y deductiva, para propiciar una mejor comprensión de los conceptos.
- ~ El dominio de la coordinación de los registros de representación motivan el cambio conceptual porque permiten igualar las unidades significativas de registros cada vez más complejos.
- ~ El dominio de los procesos cognitivos de interpretación inductiva y deductiva de los registros de representación motivan el cambio conceptual porque aseguran la validez dentro de la comprensión interna del sujeto que aprende y aseguran la validez de la justificación externa (hacia los demás), lo que le da la formalidad a la investigación científica.



## Referencias bibliográficas

- AAAS. (1990). Hábitos de la mente. Capítulo XII. Ciencia: Conocimiento para todos [versión html]. En: <http://www.project2061.org/esp/publications/sfaa/online/chap12.htm> [recuperado el 6 de febrero de 2014]
- Bello, Silvia (2004). Ideas previas y cambio conceptual. *Educación química*. 15(3): 60-67.
- Baird, D. C. (1991). *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- CCADET. Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, UNAM, <http://ihm.ccadet.unam.mx/ideasprevias> [recuperado en 31 de mayo de 2012].
- Conde Solano, Luis A. (2009). Las fracciones al ritmo de la música. Tesis de maestría publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN México. 198 págs.
- Confrey, Jere y Smith Erick (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26: 135-164.
- Drake, Stillman. (1975). The role of music in Galileo's Experiments. *Scientific American*, 232 (6): 98-104.
- Düring, Ingemar. (1990). *Aristóteles, Exposición e Interpretación de su Pensamiento*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. págs. 173-201, México: Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de Registres de représentation sémiotique et le fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5:37-65, (1993), Strasbourg: IREM de Strasbourg
- Ebersbach, Mirjam, Van Dooren, Wim y Verschaffel, Lieven. (2011). Knowledge on accelerated motion as measure by implicit tasks in 5 to 16 year olds. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9: 25-56.
- Farmaki, Vassiliki; Klaudatos, Nikos y Paschos, Theodorus (2004). Integrating the History of Mathematics in Educational Praxis. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 28:14-18.
- Fernández, Manuel y Rondero Carlos. (2001). El inicio histórico del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(2):145-156.
- Flores-Camacho, Fernando. (2012). *La enseñanza de la ciencia en la educación básica en México*. México: INEE.

- Freudenthal, H. (1983). Razón y proporcionalidad. Capítulo XX, Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados). Traducción de Luis Puig, 2001, México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. En: <http://www.uv.es/puigl/cap6razon.pdf> [recuperado el 6 de febrero de 2014].
- Guía-2009 Educación Media Superior, Universidad Nacional Autónoma de México. Secretaría General. Dirección General de Administración Escolar. Concurso de Ingreso a la Educación Media Superior de la Zona Metropolitana en la Ciudad de México (COMIPEMS).
- Gutiérrez González, Israel; Pérez Aguirre, Elda Gabriela y Medel Esquivel, Ricardo. (2012). *Física, Ciencias 2*. México: Castillo.
- Halloun, Ibrahim A. y Hestenes, David. (1985). The initial knowledge state of college physics students. *American Journal of Physics*, 53: 1043-1055
- Hacyan, Shahen. (1989). *Relatividad para principiantes*. Vol. 78. México: Fondo de Cultura Económica.
- Hierrezuelo Moreno, José y Montero Moreno A. (2006). *La ciencia de los alumnos, su utilización en la didáctica de la física y la química*. (Primera edición 1989). México: Fontamara.
- Hosson, Cécile. (2011). Una controversia histórica al servicio de una situación de aprendizaje: una reconstrucción didáctica basada en Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo de Galileo. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1): 115–126
- Koestler, Arthur. (2007). *Los sonámbulos. Origen y desarrollo de la cosmología*. págs. 59-60. México: Librería y Consejo Nacional para la Cultura y las Artes (año de publicación del libro original; 1959).
- Laburú, C. E. y de Carvalho, A. M. P. (1992). Investigación del desarrollo y aprendizaje de la noción de aceleración en adolescentes. *Enseñanza de las Ciencias*, 10 (1): 63-72.
- Manzur Guzmán, Angel. (2005). *Pasos para la resolución de problemas, ejemplos de mecánica elemental*. México :Universidad Autónoma Metropolitana/Plaza y Valdez.
- Marín Martínez, Nicolás y Cárdenas Salgado, Fidel Antonio (2011). Valoración de los modelos más usados en la enseñanza de las ciencias basados en la analogía “El alumno como científico”. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1): 035–046.
- Mora, César y Herrera, Diana (2009). Una revisión sobre ideas previas del concepto de fuerza. *Latin American Journal of Physics Education*, 3(1): 72-86.
- Nosnik, Abraham y Elguea, Javier. (1985). La discusión sobre el crecimiento del conocimiento científico en el cuento de la filosofía de la ciencia. *Estudios 2, Filosofía, Historia, Letras, Primavera 1985*. En

[http://biblioteca.itam.mx/estudios/estudio/estudio02/sec\\_11.html](http://biblioteca.itam.mx/estudios/estudio/estudio02/sec_11.html) [recuperado el febrero 6, 2014].

- Posner, George J., Strike, Kenneth A., Hewson, Peter W. y Gertzog, William A. (1982). Acomodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science Education* 66(2): 211-227
- Pozo, J.I. y Flores, Fernando. (2007). *Cambio Conceptual y representacional en la enseñanza de la ciencia*. Madrid: A. Machado libros y cátedra UNESCO de educación científica para América Latina y el Caribe.
- Pozo, J.I. y Gómez Crespo, M.A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia*. Madrid: Morata.
- Resnik, Robert; Halliday, David y Krane, Kenneth S. (1999). *Física, Vol. 1*. Tercera Ed. México: CECSA
- SEP (2011). Programas de Estudio 2011, guía para el maestro, Educación Básica Secundaria, Matemáticas, Primera edición electrónica. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.
- SEP (2006). *Educación Básica. Secundaria. Ciencias. Programas de estudio 2006*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Touma, Georges. (2009). Une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 14: 79–101.
- Trowbridge, David E. y McDermott, Lillian C. (1980). Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension. *American Journal of Physics*, 48(12): 1020-1028.
- Trowbridge, David E. y McDermott, Lillian C. (1981). Investigation of student understanding of the concept of acceleration in one dimension. *American Journal of Physics*, 49(3): 242-253.
- Twigger, D., Byard, M., Driver, R., Draper, S., Hartley, R., Hennessy, S., Mohamed, R., O'Malley, C., O'Shea, T., y Scanlon, E. (1994). The conception of force and motion of students aged between 10 and 15 years: An interview study designed to guide instruction. *International Journal of Science Education*, 16(2): 215 - 229.

### **Referencias electrónicas**

- Video de Usain Bolt 9.58 100m New World Record Berlin.  
<http://www.youtube.com/watch?v=I70-ko7bAn0> [recuperado el 16 de marzo del 2014]

Espacio pedagógico - Rectorado de la Academia de Nantes. [http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/1164913531453/0/fiche\\_ressourcepedagogique/&RH=1161017156140](http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/1164913531453/0/fiche_ressourcepedagogique/&RH=1161017156140)  
[recuperado el 16 de marzo del 2014]

Liceo General y Tecnológico Lavoisier-Mayenne. <http://lavoisier.paysdelaloire.e-lyco.fr/espace-pedagogique-d-etablissement/physique-chimie/documents-et-ressources/logiciels-gratuits-de-physique-chimie-5347.htm> [recuperado el 16 de marzo del 2014]